

Конструктивы в ТЧ-1.

- а) Существуют ли попарно различные натуральные числа x, y, z удовлетворяющие уравнению $x^3 + y^3 = z^2$?
б) Существуют ли попарно различные натуральные числа x, y, z удовлетворяющие уравнению $x^3 + y^3 = z^{2018}$?
- Было, но все же повторимся. Существуют ли 3 натуральных числа таких, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на третье?
- Было, но все же повторимся. Докажите, что 1 можно представить как сумму а) 3 б) 4 в) $n > 4$ различных дробей с числителем 1.
- а) Существует ли арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$ с ненулевой разностью такая, что каждый её член имеет вид $\frac{1}{n}$?
б) Существуют ли такие натуральные числа $f_1, f_2, \dots, f_{2019}$, что при всех значениях $1 \leq k \leq 2017$ выполнено $\frac{1}{f_{k+2}} = \frac{1}{f_{k+1}} + \frac{1}{f_k}$?
- Докажите, что существует бесконечно много таких троек натуральных чисел a, b, c , что $a^{15} + b^{17} = c^{16}$.
- а) Найдите хотя бы одно такое $k > 100$, что некоторое натуральное число можно представить как в виде произведения k последовательных чисел, больших 1, так и в виде произведения $k + 2$ таких чисел.
б) Докажите, что найдется такое натуральное число $n > 1$, что произведение некоторых n последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых $n + 100$ последовательных натуральных чисел.
- Сколько чисел из отрезка $[150, 2019]$ представляются в виде $n = НОК(a, b) + НОК(b, c) + НОК(a, c)$, где a, b, c некоторые натуральные числа?
- Существует ли такой набор из 1000 различных натуральных чисел, что для любых двух чисел из набора их сумма делится на их разность?
- Найдите все такие пары натуральных чисел a и k , что для всякого натурального n , взаимно простого с a , число $a^{k^n+1} - 1$ делится на n .

Домашнее задание

- Конечно или бесконечно решений в целых числах уравнения $a^2 + b^{13} = z^2$?

Конструктивы в ТЧ-2.

- Первоклассник Сёма пока умеет писать только цифры 1 и 7. Докажите, что для любого $n > 77$ он может написать кратное 7 число с суммой цифр n .
- Доказать, что в любой бесконечной арифметической прогрессии из натуральных чисел
а) имеется бесконечно много составных чисел.
б) имеется или бесконечно много квадратов, или ни одного.
- Существует ли 1000000 таких различных натуральных чисел, что никакая сумма нескольких из этих чисел не является полным квадратом?
- Существуют ли 2017 натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?
- Докажите, что существуют такие натуральные a, b, c , что $a^2 - 1$ делится на b , $b^2 - 1$ делится на c , $c^2 - 1$ делится на a и $a + b + c > 2019$.
- Число назовём хорошим, если его можно представить в виде $1 + 1/k$, где k — некоторое натуральное число. Докажите, что каждое натуральное $n > 1$ можно записать в виде произведения n различных хороших чисел.
- Докажите, что найдутся 2018 таких целых числа $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$, по модулю больших 1000000, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2018}} = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{2018}}.$$

- Докажите, что для любого натурального n существует точный квадрат представимый в виде суммы n точных квадратов.
- Существуют ли три попарно различных ненулевых целых числа, сумма которых равна нулю, а сумма тринадцатых степеней которых является квадратом некоторого натурального числа?