

Китайская теорема об остатках-2.

Китайская теорема об остатках. Если числа m_1, m_2, \dots, m_n попарно взаимно просты, то для произвольных целых a_1, a_2, \dots, a_n существует такое x , что

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

1. Вы предлагаете кому-нибудь задумать двузначное число и сказать Вам остатки от деления этого числа на 3, 5 и 7. Почему по этим данным вы сможете отгадать задуманное число?
2. Допишите к числу 523 три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7,8,9.
3. Сколько различных остатков дают квадраты целых чисел при делении на $3 \times 5 \times 8$?
4. Существуют ли 18 последовательных чисел, каждое из которых не взаимнопросто с хотя бы одним из остальных?
5. Пусть n — натуральное число, у которого ровно k различных простых делителей. Сколько существует попарно несоразимых по модулю n целых a таких, что $a^2 - a$ делится на n ?
6. а) В арифметической прогрессии есть член, делящийся на 1000 и есть член, делящийся на 1001. Докажите, что в прогрессии есть член, делящийся на 1001000.
б) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в этой прогрессии можно выделить миллион соседних членов, у каждого из которых хотя бы 1000 делителей.
7. Пусть k_1, k_2, \dots, k_n — попарно взаимнопростые числа. Докажите, что уравнение $x_1^{k_1} + x_2^{k_2} + \dots + x_{n-1}^{k_{n-1}} = x_n^{k_n}$ имеет решение в натуральных числах.

Китайская теорема об остатках-2.

Китайская теорема об остатках. Если числа m_1, m_2, \dots, m_n попарно взаимно просты, то для произвольных целых a_1, a_2, \dots, a_n существует такое x , что

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

1. Вы предлагаете кому-нибудь задумать двузначное число и сказать Вам остатки от деления этого числа на 3, 5 и 7. Почему по этим данным вы сможете отгадать задуманное число?
2. Допишите к числу 523 три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7,8,9.
3. Сколько различных остатков дают квадраты целых чисел при делении на $3 \times 5 \times 8$?
4. Существуют ли 18 последовательных чисел, каждое из которых не взаимнопросто с хотя бы одним из остальных?
5. Пусть n — натуральное число, у которого ровно k различных простых делителей. Сколько существует попарно несоразимых по модулю n целых a таких, что $a^2 - a$ делится на n ?
6. а) В арифметической прогрессии есть член, делящийся на 1000 и есть член, делящийся на 1001. Докажите, что в прогрессии есть член, делящийся на 1001000.
б) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в этой прогрессии можно выделить миллион соседних членов, у каждого из которых хотя бы 1000 делителей.
7. Пусть k_1, k_2, \dots, k_n — попарно взаимнопростые числа. Докажите, что уравнение $x_1^{k_1} + x_2^{k_2} + \dots + x_{n-1}^{k_{n-1}} = x_n^{k_n}$ имеет решение в натуральных числах.