Инвариант

Кружок школы 1568. 9 Класс

0 а) На листке написаны целые числа от 1 до 10. Можно стереть любые два числа a и b и записать число $a+b$. В конце осталось одно число. Какое?
б) Тот же вопрос, если вместо a и b можно записать ab.

1. Изначально на доске написаны числа 4, 5, 6. Разрешается взять любые два из написанных чисел a и b, стереть их. А на их месте написать числа а) $\dfrac{5a-3b}{2}$ и $\dfrac{5b-3a}{2}$; б) $\dfrac{a^2}{b}$ и $\dfrac{b^2}{a}$; Можно ли такими операциями получить числа 7, 8, 9?
2. Фигура «верблюд» ходит по доске 10×10 ходом типа $(1, 3)$ (то есть, она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается еще на три поля в перпендикулярном направлении; конь, например, ходит ходом типа $(1, 2)$). Можно ли пройти ходом «верблюда» с какого-то исходного поля на соседнее с ним?
3. Вася написал на доске шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Каждую минуту он увеличивает два из них на единицу. Может ли Вася через некоторое время получить 6 равных чисел?
4. На столе лежит 21 монета решкой вверх. За одну операцию разрешается перевернуть любые 20 монет. Можно ли за несколько операций добиться, чтобы все монеты легли орлом вверх?
5. В марсианском алфавите есть две буквы - У и Ы, причем если из любого слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно также смысл не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Верно ли, что слова ЫУЫУЫ и УЫУЫУ имеют одинаковый смысл?
6. Можно ли операциями “прибавить 4” и “умножить на 5”, получить из числа 3 число 2017.
7. 100 фишек выставлены в ряд.
   а) Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?
   б) Пусть теперь разрешено менять фишки, стоящие через две. Можно ли тогда переставить фишки в обратном порядке?
8. На доске по кругу написаны четыре числа 2, 0, 1, 7. Раз в минуту Петя одновременно записывает между каждыми двумя соседними числами a и b число $a-b$, если a больше b, и $10+a-b$ в противном случае. Чему будет равна последняя цифра суммы чисел на доске через 2 часа?
9. На сосне растут 8 бананов и 7 апельсинов. Если сорвать два одинаковых фрукта, то на сосне тут же вырастет один банан, а если сорвать два разных — вырастет один апельсин. Срывать фрукты по одному нельзя. В конце концов на сосне останется один фрукт. Какой?
10. На доске выписаны числа $1, \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a и b заменить их на число $ab+a+b$. Какое число останется после $n-1$ таких операций?
11. Есть три кучки камней: 51 камень – в первой, 49 – во второй, 5 – в третьей. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?
12. На доске написаны числа $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. За ход можно выбрать пару чисел a и b, и заменить их на $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Можно ли получить в итоге тройку чисел $1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$?

Инвариант

Кружок школы 1568. 9 Класс

0 а) На листке написаны целые числа от 1 до 10. Можно стереть любые два числа a и b и записать число $a+b$. В конце осталось одно число. Какое?
б) Тот же вопрос, если вместо a и b можно записать ab.

1. Изначально на доске написаны числа 4, 5, 6. Разрешается взять любые два из написанных чисел a и b, стереть их. А на их месте написать числа а) $\dfrac{5a-3b}{2}$ и $\dfrac{5b-3a}{2}$; б) $\dfrac{a^2}{b}$ и $\dfrac{b^2}{a}$; Можно ли такими операциями получить числа 7, 8, 9?
2. Фигура «верблюд» ходит по доске 10×10 ходом типа $(1, 3)$ (то есть, она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается еще на три поля в перпендикулярном направлении; конь, например, ходит ходом типа $(1, 2)$). Можно ли пройти ходом «верблюда» с какого-то исходного поля на соседнее с ним?
3. Вася написал на доске шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Каждую минуту он увеличивает два из них на единицу. Может ли Вася через некоторое время получить 6 равных чисел?
4. На столе лежит 21 монета решкой вверх. За одну операцию разрешается перевернуть любые 20 монет. Можно ли за несколько операций добиться, чтобы все монеты легли орлом вверх?
5. В марсианском алфавите есть две буквы - У и Ы, причем если из любого слова выкинуть стоящие рядом буквы УЫ, то смысл слова не изменится. Точно также смысл не изменится при добавлении в любое место слова буквосочетания ЫУ или УУЫЫ. Верно ли, что слова ЫУЫУЫ и УЫУЫУ имеют одинаковый смысл?
6. Можно ли операциями “прибавить 4” и “умножить на 5”, получить из числа 3 число 2017.
7. 100 фишек выставлены в ряд.
   а) Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?
   б) Пусть теперь разрешено менять фишки, стоящие через две. Можно ли тогда переставить фишки в обратном порядке?
8. На доске по кругу написаны четыре числа 2, 0, 1, 7. Раз в минуту Петя одновременно записывает между каждыми двумя соседними числами a и b число $a-b$, если a больше b, и $10+a-b$ в противном случае. Чему будет равна последняя цифра суммы чисел на доске через 2 часа?
9. На сосне растут 8 бананов и 7 апельсинов. Если сорвать два одинаковых фрукта, то на сосне тут же вырастет один банан, а если сорвать два разных — вырастет один апельсин. Срывать фрукты по одному нельзя. В конце концов на сосне останется один фрукт. Какой?
10. На доске выписаны числа $1, \dfrac{1}{2}, \ldots, \dfrac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа a и b заменить их на число $ab+a+b$. Какое число останется после $n-1$ таких операций?
11. Есть три кучки камней: 51 камень – в первой, 49 – во второй, 5 – в третьей. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?
12. На доске написаны числа $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. За ход можно выбрать пару чисел a и b, и заменить их на $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Можно ли получить в итоге тройку чисел $1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$?