Графы. Лемма о рукопожатиях.

1. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?
2. В королевстве 1001 город. Можно ли проложить между городами дороги так, чтобы из каждого города выходило ровно 7 дорог?
3. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходят 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
4. Некоторые участники совещания обменялись друг с другом рукопожатиями. Докажите, что число участников, пожавших нечётное число рук, будет чётным.
5. Из полного 100-вершинного графа выкинули 98 рёбер. Доказать, что он остался связным.
6. В одной стране некоторые города связаны друг с другом авиалиниями. Из столицы выходит 25 авиалиний, из города Дальнего --- одна, из всех остальных городов --- по 10 линий. Докажите, что из столицы можно добраться до Дальнего (возможно, с пересадками).
7. В одной стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.
8. В стране 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого.
9. На столе лежат монеты достоинством в 1, 2, 3 и 5 копеек на сумму 9 рублей 99 копеек. Может ли число соседей каждой монеты быть равно её достоинству? (Монеты – соседи, если они касаются друг друга).
10. В некоторой стране любые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что можно выбрать вид транспорта так, чтобы от любого города до любого другого можно было добраться только этим видом транспорта.
11. У Пети всего 28 одноклассников. У каждых двух из 28 различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?
12. Каждый из 102 учеников одной школы знаком не менее чем с 68 другими. Докажите, что среди них найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.
13. Докажите, что среди 50 человек найдутся двое, у которых чётное число общих знакомых (быть может, 0) среди остальных 48 человек.

Домашнее задание

1. В шахматном турнире каждый из восьми участников сыграл с каждым. В случае ничьей (и только в этом случае) партия ровно один раз переигрывалась и результат переигровки заносился в таблицу. Барон Мюнхгаузен утверждает, что в итоге два участника турнира сыграли по 11 партий, один – 10 партий, три – по 8 партий и два – по 7 партий. Может ли он оказаться прав?
2. Могут ли степени вершин в графе быть равны:
   а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2?
   б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1?
   в) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?

Графы. Лемма о рукопожатиях.

1. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?
2. В королевстве 1001 город. Можно ли проложить между городами дороги так, чтобы из каждого города выходило ровно 7 дорог?
3. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходят 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
4. Некоторые участники совещания обменялись друг с другом рукопожатиями. Докажите, что число участников, пожавших нечётное число рук, будет чётным.
5. Из полного 100-вершинного графа выкинули 98 рёбер. Доказать, что он остался связным.
6. В одной стране некоторые города связаны друг с другом авиалиниями. Из столицы выходит 25 авиалиний, из города Дальнего --- одна, из всех остальных городов --- по 10 линий. Докажите, что из столицы можно добраться до Дальнего (возможно, с пересадками).
7. В одной стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.
8. В стране 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого.
9. На столе лежат монеты достоинством в 1, 2, 3 и 5 копеек на сумму 9 рублей 99 копеек. Может ли число соседей каждой монеты быть равно её достоинству? (Монеты – соседи, если они касаются друг друга).
10. В некоторой стране любые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Докажите, что можно выбрать вид транспорта так, чтобы от любого города до любого другого можно было добраться только этим видом транспорта.
11. У Пети всего 28 одноклассников. У каждых двух из 28 различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?
12. Каждый из 102 учеников одной школы знаком не менее чем с 68 другими. Докажите, что среди них найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.
13. Докажите, что среди 50 человек найдутся двое, у которых чётное число общих знакомых (быть может, 0) среди остальных 48 человек.

Домашнее задание

1. В шахматном турнире каждый из восьми участников сыграл с каждым. В случае ничьей (и только в этом случае) партия ровно один раз переигрывалась и результат переигровки заносился в таблицу. Барон Мюнхгаузен утверждает, что в итоге два участника турнира сыграли по 11 партий, один – 10 партий, три – по 8 партий и два – по 7 партий. Может ли он оказаться прав?
2. Могут ли степени вершин в графе быть равны:
   а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2?
   б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1?
   в) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?