

Сборы школы 1568. 9 Класс

Разной 1. Новая надежда

- (1) Фокусник выкладывает 36 карт в 6 столбцов по 6 карт и просит Зрителя мысленно выбрать карту и запомнить столбец, её содержащий. После этого Фокусник определённым образом собирает карты, снова выкладывает в виде квадрата 6×6 и просит Зрителя назвать номера столбцов, содержащих выбранную карту в первый и второй раз. После ответа Зрителя Фокусник безошибочно отгадывает карту. Как действовать Фокуснику, чтобы фокус гарантированно удался?
- (2) Числа a и b таковы, что $a^3 - b^3 = 2$, $a^5 - b^5 \geq 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geq 2$
- (2) Дан равнобедренный треугольник ABC , $AB = BC$. В окружности Ω , описанной около треугольника ABC , проведен диаметр CC' . Прямая, проходящая через точку C' параллельно BC , пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что M — середина отрезка $C'P$.
- (2) В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH . Перпендикуляр, восстановленный в точке M к прямой AM , пересекает луч HB в точке K . Докажите, что если $\angle MAC = 30^\circ$, то $AK = BC$.
- (3) За круглым столом сидят 30 человек — рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них ровно один друг, причем у рыцаря этот друг — лжец, а у лжеца этот друг — рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос «Сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили «да». Сколько из остальных могли также ответить «да»? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)
- (3) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K . Оказалось, что точки B , D , а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC ?
- (4) Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число $am^2 + bn^2$ является точным квадратом. Докажите, что $ab = 0$.

Сборы школы 1568. 9 Класс

Разной 1. Новая надежда

- (1) Фокусник выкладывает 36 карт в 6 столбцов по 6 карт и просит Зрителя мысленно выбрать карту и запомнить столбец, её содержащий. После этого Фокусник определённым образом собирает карты, снова выкладывает в виде квадрата 6×6 и просит Зрителя назвать номера столбцов, содержащих выбранную карту в первый и второй раз. После ответа Зрителя Фокусник безошибочно отгадывает карту. Как действовать Фокуснику, чтобы фокус гарантированно удался?
- (2) Числа a и b таковы, что $a^3 - b^3 = 2$, $a^5 - b^5 \geq 4$. Докажите, что $a^2 + b^2 \geq 2$
- (2) Дан равнобедренный треугольник ABC , $AB = BC$. В окружности Ω , описанной около треугольника ABC , проведен диаметр CC' . Прямая, проходящая через точку C' параллельно BC , пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что M — середина отрезка $C'P$.
- (2) В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH . Перпендикуляр, восстановленный в точке M к прямой AM , пересекает луч HB в точке K . Докажите, что если $\angle MAC = 30^\circ$, то $AK = BC$.
- (3) За круглым столом сидят 30 человек — рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них ровно один друг, причем у рыцаря этот друг — лжец, а у лжеца этот друг — рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос «Сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили «да». Сколько из остальных могли также ответить «да»? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)
- (3) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K . Оказалось, что точки B , D , а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC ?
- (4) Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число $am^2 + bn^2$ является точным квадратом. Докажите, что $ab = 0$.