Сборы школы 1568. 8 Класс

Теория чисел. Разнобой.

1. Есть ли у числа $11\dots11$ (2019 единиц) десятизначный делитель, все цифры которого различны?
2. Натуральное число заканчивается на ноль, а наибольший из его делителей, не равных ему самому, является степенью простого числа. Найдите предпоследнюю цифру этого числа.
3. Имеется три последовательных чётных числа. У первого из них нашли наибольший чётный собственный делитель, у второго — наибольший нечётный собственный делитель, у третьего — опять наибольший собственный чётный делитель. Может ли сумма трёх полученных делителей быть равна 2013? (Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и этого числа)
4. Приведите пример шести различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них не делится на сумму всех чисел, а произведение любых трех из них — делится
5. Все собственные делители натурального числа N, выписали в ряд по убыванию: $d_1 > d_2 > \dots > d_k$. Оказалось, что в каждой паре делителей, одинаково удалённых от концов этого ряда, больший делитель делится на меньший (то есть d_1 делится на d_k, d_2 — на d_{k-1} и т.д.). Докажите, что в любой паре делителей числа N больший делитель делится на меньший
6. Дано n попарно взаимно простых чисел, больших 1 и меньших $(2n-1)^2$. Докажите, что среди них обязательно есть простое число.

посложнее

7. Взяли четыре натуральных числа. Для каждой пары этих чисел выписали их наибольший общий делитель. Получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может принимать число N?
8. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвертая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных
9. У натурального числа n нашли все собственные делители (их оказалось не меньше трёх) и записали всевозможные их попарные суммы (повторно одинаковые суммы не записывали). Докажите, что полученный набор не мог оказаться набором всех собственных делителей никакого натурального числа.
10. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?
11. Докажите, что существует натуральное число n, большее 10^{100}, такое, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.

Сборы школы 1568. 8 Класс

Теория чисел. Разнобой.

1. Есть ли у числа $11\dots11$ (2019 единиц) десятизначный делитель, все цифры которого различны?
2. Натуральное число заканчивается на ноль, а наибольший из его делителей, не равных ему самому, является степенью простого числа. Найдите предпоследнюю цифру этого числа.
3. Имеется три последовательных чётных числа. У первого из них нашли наибольший чётный собственный делитель, у второго — наибольший нечётный собственный делитель, у третьего — опять наибольший собственный чётный делитель. Может ли сумма трёх полученных делителей быть равна 2013? (Делитель натурального числа называется собственным, если он отличен от 1 и этого числа)
4. Приведите пример шести различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них не делится на сумму всех чисел, а произведение любых трех из них — делится
5. Все собственные делители натурального числа N, выписали в ряд по убыванию: $d_1 > d_2 > \dots > d_k$. Оказалось, что в каждой паре делителей, одинаково удалённых от концов этого ряда, больший делитель делится на меньший (то есть d_1 делится на d_k, d_2 — на d_{k-1} и т.д.). Докажите, что в любой паре делителей числа N больший делитель делится на меньший
6. Дано n попарно взаимно простых чисел, больших 1 и меньших $(2n-1)^2$. Докажите, что среди них обязательно есть простое число.

посложнее

7. Взяли четыре натуральных числа. Для каждой пары этих чисел выписали их наибольший общий делитель. Получились шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, N, где $N > 5$. Какое наименьшее значение может принимать число N?
8. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвертая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных
9. У натурального числа n нашли все собственные делители (их оказалось не меньше трёх) и записали всевозможные их попарные суммы (повторно одинаковые суммы не записывали). Докажите, что полученный набор не мог оказаться набором всех собственных делителей никакого натурального числа.
10. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?
11. Докажите, что существует натуральное число n, большее 10^{100}, такое, что сумма всех простых чисел, меньших n, взаимно проста с n.