

Разбиение на пары

1. а) Все костяшки домино выложили в цепь. На одном конце оказалось 5 очков. Сколько очков на другом конце?
б) Из всех костяшек домино выкинули пустышки. Можно ли оставшиеся выложить в цепь?
2. На столе выложены в ряд 64 гирьки, причём масса двух любых соседних гирек отличается на 1г. Требуется разложить гирьки на две кучки с равными массами и равным количеством гирь. Всегда ли это удастся?
3. На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды все они сели по кругу, и каждый сказал: «Среди двух моих соседей есть лжец!». Затем они сели по кругу в другом порядке, и каждый сказал: «Среди двух моих соседей нет рыцаря!». Могло ли на острове быть 2017 человек?
4. За круглым столом сидят 30 человек — рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них ровно один друг, причем у рыцаря этот друг — лжец, а у лжеца этот друг — рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос «Сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили «да». Сколько из остальных могли также ответить «да»? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)
5. Пусть p – простое число, большее 2, а $m/n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$. Докажите, что m делится на p .
6. а) Каких шестизначных автобусных билетов больше с суммой цифр 21 или с суммой цифр 33?
б) Номер называется счастливым, если сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр. Докажите, что сумма всех счастливых номеров делится на 999999
в) Докажите, что счастливых билетов столько же, сколько билетов с суммой цифр 27.
г) Сколько существует шестизначных автобусных билетов сумма цифр, которых четна?
д) Каких шестизначных автобусных билетов больше счастливых или делящихся на 11?
7. В Москве живет 2000 скалолазов, в Санкт-Петербурге и Красноярске — по 500, в Екатеринбурге — 200, а остальные 100 рассеяны по территории России. Где нужно устроить чемпионат России по скалолазанию, чтобы транспортные расходы участников были минимальны?
8. *На шахматной доске размером 20×20 расставлены 220 коней, которые бьют все свободные клетки. Докажите, что можно убрать 20 коней таким образом, чтобы оставшиеся кони били все свободные клетки. Напомним, что конь бьёт буквой «Г».

Разбиение на пары

1. а) Все костяшки домино выложили в цепь. На одном конце оказалось 5 очков. Сколько очков на другом конце?
б) Из всех костяшек домино выкинули пустышки. Можно ли оставшиеся выложить в цепь?
2. На столе выложены в ряд 64 гирьки, причём масса двух любых соседних гирек отличается на 1г. Требуется разложить гирьки на две кучки с равными массами и равным количеством гирь. Всегда ли это удастся?
3. На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды все они сели по кругу, и каждый сказал: «Среди двух моих соседей есть лжец!». Затем они сели по кругу в другом порядке, и каждый сказал: «Среди двух моих соседей нет рыцаря!». Могло ли на острове быть 2017 человек?
4. За круглым столом сидят 30 человек — рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них ровно один друг, причем у рыцаря этот друг — лжец, а у лжеца этот друг — рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос «Сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили «да». Сколько из остальных могли также ответить «да»? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)
5. Пусть p – простое число, большее 2, а $m/n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$. Докажите, что m делится на p .
6. а) Каких шестизначных автобусных билетов больше с суммой цифр 21 или с суммой цифр 33?
б) Номер называется счастливым, если сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр. Докажите, что сумма всех счастливых номеров делится на 999999
в) Докажите, что счастливых билетов столько же, сколько билетов с суммой цифр 27.
г) Сколько существует шестизначных автобусных билетов сумма цифр, которых четна?
д) Каких шестизначных автобусных билетов больше счастливых или делящихся на 11?
7. В Москве живет 2000 скалолазов, в Санкт-Петербурге и Красноярске — по 500, в Екатеринбурге — 200, а остальные 100 рассеяны по территории России. Где нужно устроить чемпионат России по скалолазанию, чтобы транспортные расходы участников были минимальны?
8. *На шахматной доске размером 20×20 расставлены 220 коней, которые бьют все свободные клетки. Докажите, что можно убрать 20 коней таким образом, чтобы оставшиеся кони били все свободные клетки. Напомним, что конь бьёт буквой «Г».