

Принцип Дирихле в геометрии.

1. На плоскости даны треугольник ABC и 10 прямых, среди которых нет параллельных друг другу. Оказалось, что каждая из прямых равноудалена от каких-то двух вершин треугольника ABC . Докажите, что хотя бы три из этих прямых пересекаются в одной точке.
2. В основании пирамиды выпуклый пятиугольник. Каждая диагональ основания и все боковые ребра окрашены в красный или синий цвет. Оба цвета использованы (заметим, что стороны основания не окрашиваются). Докажите, что существует одноцветный треугольник.
3. а) В квадрате со стороной 1 отметили 51 точку. Докажите, что три из них можно покрыть кругом радиуса $1/7$.
б) Внутри правильного треугольника со стороной 5 произвольно расположены 76 точек. Докажите, что можно так выбрать круг радиуса $1/\sqrt{3}$, что он покрывает не менее четырех из этих точек.
4. Равносторонний треугольник ABC и квадрат $MNPQ$ вписаны в окружность длины S . Ни одна из вершин треугольника не совпадает с вершинами квадрата. Их вершины делят окружность на семь частей. Докажите, что, по крайней мере, одна из них не больше $S/24$.
5. Каждый день Фрекен Бок испекает квадратный торт размером 3×3 . Карлсон немедленно вырезает себе из него четыре квадратных куска размером 1×1 , со сторонами, параллельными сторонам квадрата (не обязательно по линиям сетки 3×3). После этого Малыш также вырезает себе из оставшейся части торта квадратный кусок со сторонами, также параллельными сторонам торта. На какой наибольший кусок торта может рассчитывать Малыш вне зависимости от действий Карлсона?
6. На каждой стороне выпуклого четырехугольника, как на диаметре, построен круг. Докажите, что эти четыре круга полностью покрывают четырехугольник.
7. В единичный квадрат бросили а) 102 точки б) 101 точку, причём никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не превосходит $1/100$.
8. Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая по крайней мере четыре из этих окружностей.
9. Известно, что в кадр фотоаппарата, расположенного в точке O , не могут попасть предметы A и B такие, что угол AOB больше 179° . На плоскости поставлено 1000 таких фотоаппаратов. Одновременно каждым фотоаппаратом делают по одному снимку. Доказать, что найдётся снимок, на котором сфотографировано не больше 998 фотоаппаратов.
10. В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.

Принцип Дирихле в геометрии.

1. На плоскости даны треугольник ABC и 10 прямых, среди которых нет параллельных друг другу. Оказалось, что каждая из прямых равноудалена от каких-то двух вершин треугольника ABC . Докажите, что хотя бы три из этих прямых пересекаются в одной точке.
2. В основании пирамиды выпуклый пятиугольник. Каждая диагональ основания и все боковые ребра окрашены в красный или синий цвет. Оба цвета использованы (заметим, что стороны основания не окрашиваются). Докажите, что существует одноцветный треугольник.
3. а) В квадрате со стороной 1 отметили 51 точку. Докажите, что три из них можно покрыть кругом радиуса $1/7$.
б) Внутри правильного треугольника со стороной 5 произвольно расположены 76 точек. Докажите, что можно так выбрать круг радиуса $1/\sqrt{3}$, что он покрывает не менее четырех из этих точек.
4. Равносторонний треугольник ABC и квадрат $MNPQ$ вписаны в окружность длины S . Ни одна из вершин треугольника не совпадает с вершинами квадрата. Их вершины делят окружность на семь частей. Докажите, что, по крайней мере, одна из них не больше $S/24$.
5. Каждый день Фрекен Бок испекает квадратный торт размером 3×3 . Карлсон немедленно вырезает себе из него четыре квадратных куска размером 1×1 , со сторонами, параллельными сторонам квадрата (не обязательно по линиям сетки 3×3). После этого Малыш также вырезает себе из оставшейся части торта квадратный кусок со сторонами, также параллельными сторонам торта. На какой наибольший кусок торта может рассчитывать Малыш вне зависимости от действий Карлсона?
6. На каждой стороне выпуклого четырехугольника, как на диаметре, построен круг. Докажите, что эти четыре круга полностью покрывают четырехугольник.
7. В единичный квадрат бросили а) 102 точки б) 101 точку, причём никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не превосходит $1/100$.
8. Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая по крайней мере четыре из этих окружностей.
9. Известно, что в кадр фотоаппарата, расположенного в точке O , не могут попасть предметы A и B такие, что угол AOB больше 179° . На плоскости поставлено 1000 таких фотоаппаратов. Одновременно каждым фотоаппаратом делают по одному снимку. Доказать, что найдётся снимок, на котором сфотографировано не больше 998 фотоаппаратов.
10. В круге радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежит не менее 10 из данных точек.