

## Параллелограмм.

- Докажите, что диагонали прямоугольника равны.
- На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  параллелограмма  $ABCD$  выбраны точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $AK=CM$  и  $AN=CL$ .
  - Докажите, что  $KLMN$  — параллелограмм.
  - Докажите, что четырёхугольник с вершинами в точках пересечения прямых  $AL$ ,  $BM$ ,  $CN$  и  $DK$  — параллелограмм.
- На сторонах  $AB$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  с острым углом  $A$  во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники  $ABX$  и  $BCY$ . Докажите, что треугольник  $DXU$  равносторонний.
- На сторонах  $AD$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  выбраны точки  $X$  и  $Y$  соответственно так, что  $XY$  параллельно  $AB$ . Биссектрисы углов  $A$  и  $C$  пересекают отрезок  $XY$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Докажите, что  $\angle ADP = \angle ABQ$ .
- Дан параллелограмм  $ABCD$  с тупым углом  $B$ . Точка  $E$  выбрана так, что  $AE$  параллельно  $BD$  и  $BE$  перпендикулярно  $BC$ . Докажите, что  $\angle AEB = \angle CEB$ .
- Трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  такова, что угол  $ABD$  — прямой и  $BC+CD=AD$ . Найдите отношение оснований  $AD : BC$ .
- В параллелограмме  $ABCD$  из вершины тупого угла  $B$  проведены две высоты  $BM$  и  $BN$ , а из вершины  $D$  проведены высоты  $DP$  и  $DQ$ . Докажите, что  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  являются вершинами прямоугольника.
- Через точку на стороне треугольника проведена прямая, параллельная другой стороне, до пересечения с третьей стороной треугольника. Через полученную точку проведена прямая, параллельная первой стороне треугольника и т.д. Докажите, что
  - если исходная точка совпадает с серединой стороны треугольника, то четвёртая точка, полученная таким способом, совпадёт с исходной;
  - если исходная точка отлична от середины стороны треугольника, то седьмая точка, полученная таким способом, совпадёт с исходной.

## Параллелограмм.

- Докажите, что диагонали прямоугольника равны.
- На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  параллелограмма  $ABCD$  выбраны точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $AK=CM$  и  $AN=CL$ .
  - Докажите, что  $KLMN$  — параллелограмм.
  - Докажите, что четырёхугольник с вершинами в точках пересечения прямых  $AL$ ,  $BM$ ,  $CN$  и  $DK$  — параллелограмм.
- На сторонах  $AB$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  с острым углом  $A$  во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники  $ABX$  и  $BCY$ . Докажите, что треугольник  $DXU$  равносторонний.
- На сторонах  $AD$  и  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  выбраны точки  $X$  и  $Y$  соответственно так, что  $XY$  параллельно  $AB$ . Биссектрисы углов  $A$  и  $C$  пересекают отрезок  $XY$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Докажите, что  $\angle ADP = \angle ABQ$ .
- Дан параллелограмм  $ABCD$  с тупым углом  $B$ . Точка  $E$  выбрана так, что  $AE$  параллельно  $BD$  и  $BE$  перпендикулярно  $BC$ . Докажите, что  $\angle AEB = \angle CEB$ .
- Трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  такова, что угол  $ABD$  — прямой и  $BC+CD=AD$ . Найдите отношение оснований  $AD : BC$ .
- В параллелограмме  $ABCD$  из вершины тупого угла  $B$  проведены две высоты  $BM$  и  $BN$ , а из вершины  $D$  проведены высоты  $DP$  и  $DQ$ . Докажите, что  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  являются вершинами прямоугольника.
- Через точку на стороне треугольника проведена прямая, параллельная другой стороне, до пересечения с третьей стороной треугольника. Через полученную точку проведена прямая, параллельная первой стороне треугольника и т.д. Докажите, что
  - если исходная точка совпадает с серединой стороны треугольника, то четвёртая точка, полученная таким способом, совпадёт с исходной;
  - если исходная точка отлична от середины стороны треугольника, то седьмая точка, полученная таким способом, совпадёт с исходной.