Окружности-2. Вписанные четырехугольники.

1. В треугольнике ABC проведены медианы AM и BN. Докажите, что если $\angle CAM = \angle CBL$, то $AC = BC$.
2. Четырехугольник $ABCD$ – вписанный. На диагоналях AC и BD отметили точки K и L так, что четырехугольник $BCKL$ получился вписанным. Докажите, что прямые KL и AD параллельны.
3. Найдите геометрическое место точек A таких что отрезок BC фиксирован и в треугольнике ABC угол A равен α.
4. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на основании AD. Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.
5. AL – биссектриса треугольника ABC, K –точка на стороне AC такая, что $CK = CL$. Прямая KL и биссектриса угла B пересекаются в точке P. Докажите, что $AP = PL$.
6. **Теорема Микеля.** Пусть формально ABC – треугольник с произвольными точками A', B' и C' соответственно на сторонах BC, AC и AB (или на их продолжениях). Опишем три окружности около треугольников $AB'C', A'BC'$, и $A'B'C$. Докажите, что эти три окружности пересекутся в одной точке M, называемой точкой Микеля.
   Постройте пересечение двух окружностей и рассмотрите оставшийся четырехугольник.
7. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5, BC = 6, AC = 7$. Окружность, проходящая через точки A и C,пересекает прямые AB и BC соответственно в точках K и L отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.
8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE и CD. Различные точки F и G на стороне AC таковы, что $DF \| BC$ и $EG \| AB$. Докажите, что точки D, E, F, G лежат на одной окружности.
9. Точка O — центр описанной окружности равнобокой трапеции $ABCD$ $(AD \| BC)$, K — точка пересечения её диагоналей. Докажите, что точки A, B, K, O лежат на одной окружности.
10. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. Окружность, описанная около треугольника ADB, пересекает сторону AC в точке M, а окружность, описанная около треугольника ADC, пересекает сторону AB в точке N $(M, N \neq A)$. Пусть O — центр описанной окружности треугольника AMN. Докажите, что $OD \perp BC$.

Окружности-2. Вписанные четырехугольники.

1. В треугольнике ABC проведены медианы AM и BN. Докажите, что если $\angle CAM = \angle CBL$, то $AC = BC$.
2. Четырехугольник $ABCD$ – вписанный. На диагоналях AC и BD отметили точки K и L так, что четырехугольник $BCKL$ получился вписанным. Докажите, что прямые KL и AD параллельны.
3. Найдите геометрическое место точек A таких что отрезок BC фиксирован и в треугольнике ABC угол A равен α.
4. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на основании AD. Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.
5. AL – биссектриса треугольника ABC, K –точка на стороне AC такая, что $CK = CL$. Прямая KL и биссектриса угла B пересекаются в точке P. Докажите, что $AP = PL$.
6. **Теорема Микеля.** Пусть формально ABC – треугольник с произвольными точками A', B' и C' соответственно на сторонах BC, AC и AB (или на их продолжениях). Опишем три окружности около треугольников $AB'C', A'BC'$, и $A'B'C$. Докажите, что эти три окружности пересекутся в одной точке M, называемой точкой Микеля.
   Постройте пересечение двух окружностей и рассмотрите оставшийся четырехугольник.
7. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5, BC = 6, AC = 7$. Окружность, проходящая через точки A и C,пересекает прямые AB и BC соответственно в точках K и L отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.
8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE и CD. Различные точки F и G на стороне AC таковы, что $DF \| BC$ и $EG \| AB$. Докажите, что точки D, E, F, G лежат на одной окружности.
9. Точка O — центр описанной окружности равнобокой трапеции $ABCD$ $(AD \| BC)$, K — точка пересечения её диагоналей. Докажите, что точки A, B, K, O лежат на одной окружности.
10. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. Окружность, описанная около треугольника ADB, пересекает сторону AC в точке M, а окружность, описанная около треугольника ADC, пересекает сторону AB в точке N $(M, N \neq A)$. Пусть O — центр описанной окружности треугольника AMN. Докажите, что $OD \perp BC$.