Окружности-1. Счет дуг.

Определение. *На окружности ω с центром O отмечены точки A, B, C. Пусть BC — «меньшая» (т. е. не содержащая A) дуга BC окружности ω. Мерой дуги BC назовём величину центрального угла BOC (может быть больше 180^o); угол BAC называется вписанным углом, опирающимся на дугу BC.*

Теорема. *Мера вписанного в окружность угла равна половине меры дуги, на которую он опирается.*

1. Пусть M и N — середины «меньшей» и «большей» дуг BC описанной окружности треугольника ABC соответственно. Докажите, что
а) AM — биссектриса угла BAC;
б) AN — биссектриса внешнего угла BAC.

2. Невероятно полезная задача.
а) Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке S. Докажите, что угол ASB равен полусумме «меньших» дуг AB и CD.
б) В этой же картинке лучи AB и DC пересекаются в точке P. Докажите, что угол APD равен полуразности «меньших» дуг AD и BC.

3. а)Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, K — середина «меньшей» дуги AB, не содержащей точек C и D. Пусть P и Q — точки пересечения пар хорд CK и AB, DK и AB соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.
б) На окружность в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D. Пусть K, L, M, N — середины «меньших» (т. е. не содержащих других отмеченных точек) дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.

4. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке.
а) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами углов треугольника ABC, то они являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$.
б) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются высотами треугольника ABC, то они являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

5. Внутри остроугольного треугольника ABC нашлась такая точка P, что $\angle BPC = \angle BAC + 60^o$,
$\angle CPA = \angle CBA + 60^o, \angle APB = \angle ACB + 60^o$. Лучи AP, BP, CP продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что полученные точки пересечения лежат в вершинах равностороннего треугольника.

6. Пусть D — отражение вершины A остроугольного треугольника ABC относительно BC. Отрезки BD, CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q. Докажите, что AD — биссектриса угла PAQ.

7. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи BC и AD — в точке Q. Биссектриса угла APD пересекает отрезки AD и BC в точках K и M; биссектриса угла AQB пересекает отрезки AB и CD в точках L и N. Докажите, что $KLMN$ — ромб.

8. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N. Окружность ω с центром в M пересекает ω_1 в точках A и C, ω_2 — в точках B и D. Известно, что N лежит вне ω. Докажите, что $\angle ANB = \angle DNC$.

Домашнее задание

1. Дан четырёхугольник, около которого можно описать окружность. Две его смежные стороны равны. Докажите, что одна из его диагоналей является биссектрисой угла четырёхугольника.

2. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу пополам. Найдите углы треугольника.

Окружности-1. Счет дуг.

Определение. *На окружности ω с центром O отмечены точки A, B, C. Пусть BC — «меньшая» (т. е. не содержащая A) дуга BC окружности ω. Мерой дуги BC назовём величину центрального угла BOC (может быть больше 180^o); угол BAC называется вписанным углом, опирающимся на дугу BC.*

Теорема. *Мера вписанного в окружность угла равна половине меры дуги, на которую он опирается.*

1. Пусть M и N — середины «меньшей» и «большей» дуг BC описанной окружности треугольника ABC соответственно. Докажите, что
а) AM — биссектриса угла BAC;
б) AN — биссектриса внешнего угла BAC.

2. Невероятно полезная задача.
а) Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке S. Докажите, что угол ASB равен полусумме «меньших» дуг AB и CD.
б) В этой же картинке лучи AB и DC пересекаются в точке P. Докажите, что угол APD равен полуразности «меньших» дуг AD и BC.

3. а)Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, K — середина «меньшей» дуги AB, не содержащей точек C и D. Пусть P и Q — точки пересечения пар хорд CK и AB, DK и AB соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.
б) На окружность в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D. Пусть K, L, M, N — середины «меньших» (т. е. не содержащих других отмеченных точек) дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.

4. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке.
а) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами углов треугольника ABC, то они являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$.
б) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются высотами треугольника ABC, то они являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

5. Внутри остроугольного треугольника ABC нашлась такая точка P, что $\angle BPC = \angle BAC + 60^o$,
$\angle CPA = \angle CBA + 60^o, \angle APB = \angle ACB + 60^o$. Лучи AP, BP, CP продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что полученные точки пересечения лежат в вершинах равностороннего треугольника.

6. Пусть D — отражение вершины A остроугольного треугольника ABC относительно BC. Отрезки BD, CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q. Докажите, что AD — биссектриса угла PAQ.

7. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи BC и AD — в точке Q. Биссектриса угла APD пересекает отрезки AD и BC в точках K и M; биссектриса угла AQB пересекает отрезки AB и CD в точках L и N. Докажите, что $KLMN$ — ромб.

8. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N. Окружность ω с центром в M пересекает ω_1 в точках A и C, ω_2 — в точках B и D. Известно, что N лежит вне ω. Докажите, что $\angle ANB = \angle DNC$.

Домашнее задание

1. Дан четырёхугольник, около которого можно описать окружность. Две его смежные стороны равны. Докажите, что одна из его диагоналей является биссектрисой угла четырёхугольника.

2. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу пополам. Найдите углы треугольника.