

Неравенство Коши-3. Разное.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Тогда справедливы неравенства между средними:

$$\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \leq \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

По умолчанию числа в неравенствах считаются положительными. Докажите неравенства :

1. На почте Васе дали коробку объемом 1. У него была веревка длины 6. Сможет ли Вася завязать свою коробку для надежности так что веревка будет крест накрест обхватывать всю коробку?
2. Вспоминаем (сдавать не надо). а) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$;
б) $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.
в) Если a, b, c -неотрицательны тогда выполнено неравенство $ab + ac + bc \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$.
3. Докажите, что если $x > 0, y > 0, z > 0$ и $xy + yz + xz > 12$, то $x + y + z > 6$.
4. $(a + b + c + d)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$
5. $\frac{3}{2}(a^4 + b^4 + c^4) + 24 \geq 4(a^2b + b^2c + c^2a)$
6. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют соотношению $xy + x + y = 1$. Докажите неравенство $x^2y^2 + 1 \geq 6xy$.
7. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geq x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$.
8. Для любых x, y, z докажите неравенство $\sin^2 x \cos y + \sin^2 y \cos z + \sin^2 z \cos x \leq \frac{3}{2}$.
9. Решите уравнение $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - d + \frac{2}{5} = 0$.
10. Даны положительные числа a, b, c . Докажите, что $\frac{a}{b^3c} + \frac{b}{c^3a} + \frac{c}{a^3b} \geq \frac{2}{b^2 + c^4} + \frac{2}{c^2 + a^4} + \frac{2}{a^2 + b^4}$

Неравенство Коши-3. Разное.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Тогда справедливы неравенства между средними:

$$\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \leq \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

По умолчанию числа в неравенствах считаются положительными. Докажите неравенства :

1. На почте Васе дали коробку объемом 1. У него была веревка длины 6. Сможет ли Вася завязать свою коробку для надежности так что веревка будет крест накрест обхватывать всю коробку?
2. Вспоминаем (сдавать не надо). а) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$;
б) $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.
в) Если a, b, c -неотрицательны тогда выполнено неравенство $ab + ac + bc \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$.
3. Докажите, что если $x > 0, y > 0, z > 0$ и $xy + yz + xz > 12$, то $x + y + z > 6$.
4. $(a + b + c + d)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$
5. $\frac{3}{2}(a^4 + b^4 + c^4) + 24 \geq 4(a^2b + b^2c + c^2a)$
6. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют соотношению $xy + x + y = 1$. Докажите неравенство $x^2y^2 + 1 \geq 6xy$.
7. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geq x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$.
8. Для любых x, y, z докажите неравенство $\sin^2 x \cos y + \sin^2 y \cos z + \sin^2 z \cos x \leq \frac{3}{2}$.
9. Решите уравнение $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - bc - cd - d + \frac{2}{5} = 0$.
10. Даны положительные числа a, b, c . Докажите, что $\frac{a}{b^3c} + \frac{b}{c^3a} + \frac{c}{a^3b} \geq \frac{2}{b^2 + c^4} + \frac{2}{c^2 + a^4} + \frac{2}{a^2 + b^4}$