# Неравенство Коши-2.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Тогда справедливы неравенства между средними:

$$\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \le \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \le \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Докажите неравенства (все числа предполагаются положительными)

1. $(a+b)(a+c)(b+c) \ge 8abc$
2. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3$
3. $(a+b+c+d)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}) \ge 16$
4. $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \ge 6$
5. а)$a^4 + b^4 + 2c^2 \ge 4abc$

   б) $a^{10} + \frac{3}{a^2} + \frac{4}{a} \ge 8$

   в)$a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \ge 16$
6. $\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b+2c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c+2a}{b}\right)^2 \ge 27$
7. Произведение положительных чисел $a, b, c$ равно 8. Докажите, что
$$(a + \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b})(c + \frac{1}{c}) \ge \frac{125}{8}$$
8. Докажите, что $\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{x^2+y^4} \le \frac{1}{xy}$.
9. Докажите для положительного $x$ и натурального $n$ неравенство $1 + x^{n+1} \ge \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}$
10. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \le \frac{2}{3}(a^3 + b^3 + c^3) + 1$
11. Докажите неравенство $2x^9 + 9x^8 \le 9x^{10} + 2$
12. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{x_2} = 2 \\ x_2 + \frac{1}{x_3} = 2 \\ \dots \\ x_{99} + \frac{1}{x_{100}} = 2 \\ x_{100} + \frac{1}{x_1} = 2 \end{cases}$$

**Домашняя работа**

13. $\left(\frac{a+2b+3c+4d}{10}\right)^{10} \ge ab^2c^3d^4$
14. $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \ge 5\sqrt[5]{ab}$


# Неравенство Коши-2.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Тогда справедливы неравенства между средними:

$$\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \le \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \le \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Докажите неравенства (все числа предполагаются положительными)

1. $(a+b)(a+c)(b+c) \ge 8abc$
2. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3$
3. $(a+b+c+d)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}) \ge 16$
4. $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \ge 6$
5. а)$a^4 + b^4 + 2c^2 \ge 4abc$

   б) $a^{10} + \frac{3}{a^2} + \frac{4}{a} \ge 8$

   в)$a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \ge 16$
6. $\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b+2c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c+2a}{b}\right)^2 \ge 27$
7. Произведение положительных чисел $a, b, c$ равно 8. Докажите, что
$$(a + \frac{1}{a})(b + \frac{1}{b})(c + \frac{1}{c}) \ge \frac{125}{8}$$
8. Докажите, что $\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{x^2+y^4} \le \frac{1}{xy}$
9. Докажите для положительного $x$ и натурального $n$ неравенство $1 + x^{n+1} \ge \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}$
10. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \le \frac{2}{3}(a^3 + b^3 + c^3) + 1$.
11. Докажите неравенство $2x^9 + 9x^8 \le 9x^{10} + 2$
12. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{x_2} = 2 \\ x_2 + \frac{1}{x_3} = 2 \\ \dots \\ x_{99} + \frac{1}{x_{100}} = 2 \\ x_{100} + \frac{1}{x_1} = 2 \end{cases}$$

**Домашняя работа**

13. $\left(\frac{a+2b+3c+4d}{10}\right)^{10} \ge ab^2c^3d^4$
14. $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \ge 5\sqrt[5]{ab}$