

## Конструктивы в ТЧ-1.

- а) Существуют ли попарно различные натуральные числа  $x, y, z$  удовлетворяющие уравнению  $x^3 + y^3 = z^2$  ?  
б) Существуют ли попарно различные натуральные числа  $x, y, z$  удовлетворяющие уравнению  $x^3 + y^3 = z^{2018}$  ?
- Докажите, что 1 можно представить как сумму а) 3 б) 4 в)  $n > 4$  различных дробей с числителем 1.
- а) Существует ли арифметическая прогрессия  $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$  с ненулевой разностью такая, что каждый её член имеет вид  $\frac{1}{n}$ ?  
б) Существуют ли такие натуральные числа  $f_1, f_2, \dots, f_{2019}$ , что при всех значениях  $1 \leq k \leq 2017$  выполнено  $\frac{1}{f_{k+2}} = \frac{1}{f_{k+1}} + \frac{1}{f_k}$ ?
- Докажите, что существует бесконечно много таких троек натуральных чисел  $a, b, c$ , что  $a^{15} + b^{17} = c^{16}$ .
- а) Найдите хотя бы одно такое  $k > 100$ , что некоторое натуральное число можно представить как в виде произведения  $k$  последовательных чисел, больших 1, так и в виде произведения  $k + 2$  таких чисел.  
б) Докажите, что найдется такое натуральное число  $n > 1$ , что произведение некоторых  $n$  последовательных натуральных чисел равно произведению некоторых  $n + 100$  последовательных натуральных чисел.
- Сколько чисел из отрезка  $[150, 2019]$  представляются в виде  $n = НОК(a, b) + НОК(b, c) + НОК(a, c)$ , где  $a, b, c$  некоторые натуральные числа?
- Существует ли такой набор из 1000 различных натуральных чисел, что для любых двух чисел из набора их сумма делится на их разность?
- Найдите все такие пары натуральных чисел  $a$  и  $k$ , что для всякого натурального  $n$ , взаимно простого с  $a$ , число  $a^{k^n+1} - 1$  делится на  $n$ .

### Домашнее задание

- Конечно или бесконечно решений в натуральных числах уравнения  $a^2 + b^{13} = z^2$ ?

## Конструктивы в ТЧ-2.

- Доказать, что в любой бесконечной арифметической прогрессии из натуральных чисел  
а) имеется бесконечно много составных чисел.  
б) имеется или бесконечно много квадратов, или ни одного.
- Первоклассник Сёма пока умеет писать только цифры 1 и 7. Докажите, что для любого  $n > 77$  он может написать кратное 7 число с суммой цифр  $n$ .
- Существует ли 1000000 таких различных натуральных чисел, что никакая сумма нескольких из этих чисел не является полным квадратом?
- Существуют ли 2017 натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?
- Докажите, что существуют такие натуральные  $a, b, c$ , что  $a^2 - 1$  делится на  $b$ ,  $b^2 - 1$  делится на  $c$ ,  $c^2 - 1$  делится на  $a$  и  $a + b + c > 2019$ .
- Докажите, что для любого натурального  $n$  существует точный квадрат представимый в виде суммы  $n$  точных квадратов.
- Докажите, что найдутся 2018 таких целых числа  $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$ , по модулю больших 1000000, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2018}} = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{2018}}.$$

- Существуют ли три попарно различных ненулевых целых числа, сумма которых равна нулю, а сумма тринадцатых степеней которых является квадратом некоторого натурального числа?