Кружок школы 1568. 8 Класс

Инвариант

0. На сосне растут 8 бананов и 7 апельсинов. Если сорвать два одинаковых фрукта, то на сосне тут же вырастет один банан, а если сорвать два разных — вырастет один апельсин. Срывать фрукты по одному нельзя. В конце концов на сосне останется один фрукт. Какой?

1. Вася написал на доске шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Каждую минуту он увеличивает два из них на единицу. Может ли Вася через некоторое время получить 6 равных чисел?

2. Фигура «верблюд» ходит по доске 10×10 ходом типа (1, 3) (то есть, она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается еще на три поля в перпендикулярном направлении; конь, например, ходит ходом типа (1, 2)). Можно ли пройти ходом «верблюда» с какого-то исходного поля на соседнее с ним?

3. 100 фишек выставлены в ряд.

   а) Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

   б) Пусть теперь разрешено менять фишки, стоящие через две. Можно ли тогда переставить фишки в обратном порядке?

4. На доске по кругу написаны четыре числа 2, 0, 1, 7. Раз в минуту Петя одновременно записывает между каждыми двумя соседними числами a и b число $a-b$, если a больше b, и $10+a-b$ в противном случае. Чему будет равна последняя цифра суммы чисел на доске через 2 часа?

5. На доске написаны числа $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. За ход можно выбрать пару чисел a и b, и заменить их на $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Можно ли получить в итоге тройку чисел $1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$?

6. На доске написаны 100 чисел $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа (a, b) и записать вместо них на доску одно число $ab+a+b$. Каким может быть результат на доске после 99 действий?

7. На доске написаны 100 чисел $1, 2, \ldots, 100$. Разрешается стереть любые два числа (a, b) и записать вместо них на доску одно число $\frac{ab}{a+b+1}$. Каким может быть результат на доске после 99 действий?

8. В клетчатом квадрате $n \times n$ одна угловая клетка белая, а все остальные -— черные. Разрешается взять любую строку или столбец квадрата и поменять в ней цвет каждой клетки. Можно ли такими операциями перекрасить все клетки квадрата в белый, если

   а) n чётно

   б) n нечётно

   в) Пусть $n \geqslant 4$, но закрашена не угловая клетка, а соседняя с ней. При этом дополнительно можно перекрашивать любые диагонали (не только главные).

9. В одной из вершин n-угольника лежит одна монета, в остальных ничего не лежит. За один ход можно убрать монету из одной из вершин и добавить 6 монет в соседнюю с ней вершину. Можно добиться ли добиться того, чтобы во всех вершинах было поровну монет?

   а) $n = 2018$

   б) $n = 2015$

Кружок школы 1568. 8 Класс

Инвариант

0. На сосне растут 8 бананов и 7 апельсинов. Если сорвать два одинаковых фрукта, то на сосне тут же вырастет один банан, а если сорвать два разных — вырастет один апельсин. Срывать фрукты по одному нельзя. В конце концов на сосне останется один фрукт. Какой?

1. Вася написал на доске шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Каждую минуту он увеличивает два из них на единицу. Может ли Вася через некоторое время получить 6 равных чисел?

2. Фигура «верблюд» ходит по доске 10×10 ходом типа (1, 3) (то есть, она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается еще на три поля в перпендикулярном направлении; конь, например, ходит ходом типа (1, 2)). Можно ли пройти ходом «верблюда» с какого-то исходного поля на соседнее с ним?

3. 100 фишек выставлены в ряд.

   а) Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну фишку. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

   б) Пусть теперь разрешено менять фишки, стоящие через две. Можно ли тогда переставить фишки в обратном порядке?

4. На доске по кругу написаны четыре числа 2, 0, 1, 7. Раз в минуту Петя одновременно записывает между каждыми двумя соседними числами a и b число $a-b$, если a больше b, и $10+a-b$ в противном случае. Чему будет равна последняя цифра суммы чисел на доске через 2 часа?

5. На доске написаны числа $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. За ход можно выбрать пару чисел a и b, и заменить их на $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Можно ли получить в итоге тройку чисел $1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$?

6. На доске написаны 100 чисел $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{100}$. Разрешается стереть любые два числа (a, b) и записать вместо них на доску одно число $ab+a+b$. Каким может быть результат на доске после 99 действий?

7. На доске написаны 100 чисел $1, 2, \ldots, 100$. Разрешается стереть любые два числа (a, b) и записать вместо них на доску одно число $\frac{ab}{a+b+1}$. Каким может быть результат на доске после 99 действий?

8. В клетчатом квадрате $n \times n$ одна угловая клетка белая, а все остальные -— черные. Разрешается взять любую строку или столбец квадрата и поменять в ней цвет каждой клетки. Можно ли такими операциями перекрасить все клетки квадрата в белый, если

   а) n чётно

   б) n нечётно

   в) Пусть $n \geqslant 4$, но закрашена не угловая клетка, а соседняя с ней. При этом дополнительно можно перекрашивать любые диагонали (не только главные).

9. В одной из вершин n-угольника лежит одна монета, в остальных ничего не лежит. За один ход можно убрать монету из одной из вершин и добавить 6 монет в соседнюю с ней вершину. Можно добиться ли добиться того, чтобы во всех вершинах было поровну монет?

   а) $n = 2018$

   б) $n = 2015$