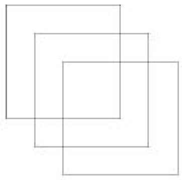
Эйлеровость.



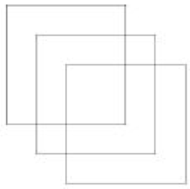
1. Можно ли нарисовать эту картинку, не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждой линии по одному разу?
2. Пешеход обошёл шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?
3. а) В графе есть эйлеров путь. Доказать, что граф связен и вершин с нечетной степенью в нем не больше двух.
   *б) Доказать обратное: если в связном графе вершин с нечётной степенью не больше двух, то в нем есть эйлеров путь.
   *в) Докажите, что если в графе нет вершин нечетной степени, то его можно обойти так, что мы начнем и закончим в одной и той же точке.
4. а) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?
   б) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы всё же изготовить требуемый каркас?
5. Любой ли связный граф можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги, если по каждому ребру разрешается проводить ровно два раза?
6. На плоскости дано 100 окружностей, составляющих связную (то есть не распадающуюся на части) фигуру. Докажите, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию.
7. Посёлок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы – квадраты со стороной b, всего 9 кварталов). Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и кончает свой путь в угловой точке A? (Стороны квадрата – тоже улицы).
8. Докажите, что связный граф с $2n$ нечётными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n-1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.
9. Дед барона фон Мюнхгаузена построил квадратный замок, разделил его на 9 квадратных залов и в центральном разместил арсенал. Отец барона разделил каждый из восьми оставшихся залов на 9 равных квадратных холлов и во всех центральных холлах устроил зимние сады. Сам барон разделил каждый из 64 свободных холлов на 9 равных квадратных комнат и в каждой из центральных комнат устроил бассейн, а остальные сделал жилыми. Барон хвастается, что ему удалось обойти все жилые комнаты, побывав в каждой по одному разу, и вернуться в исходную (в каждой стене между двумя соседними жилыми комнатами проделана дверь). Могут ли слова барона быть правдой?

Домашнее задание

1. Гуляя по Кенигсбергу, Леонард Эйлер захотел обойти город, пройдя по каждому мосту ровно один раз (см. рис.). Может ли он это сделать?

Школа 1568. Группа 8-2.
Занятие 2.

Эйлеровость.



1. Можно ли нарисовать эту картинку, не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждой линии по одному разу?
2. Пешеход обошёл шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть?
3. а) В графе есть эйлеров путь. Доказать, что граф связен и вершин с нечетной степенью в нем не больше двух.
   *б) Доказать обратное: если в связном графе вершин с нечётной степенью не больше двух, то в нем есть эйлеров путь.
   *в) Докажите, что если в графе нет вершин нечетной степени, то его можно обойти так, что мы начнем и закончим в одной и той же точке.
4. а) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?
   б) Какое наименьшее число раз придется ломать проволоку, чтобы всё же изготовить требуемый каркас?
5. Любой ли связный граф можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги, если по каждому ребру разрешается проводить ровно два раза?
6. На плоскости дано 100 окружностей, составляющих связную (то есть не распадающуюся на части) фигуру. Докажите, что эту фигуру можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию.
7. Посёлок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы – квадраты со стороной b, всего 9 кварталов). Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и кончает свой путь в угловой точке A? (Стороны квадрата – тоже улицы).
8. Докажите, что связный граф с $2n$ нечётными вершинами можно нарисовать, оторвав карандаш от бумаги ровно $n-1$ раз и не проводя никакое ребро дважды.
9. Дед барона фон Мюнхгаузена построил квадратный замок, разделил его на 9 квадратных залов и в центральном разместил арсенал. Отец барона разделил каждый из восьми оставшихся залов на 9 равных квадратных холлов и во всех центральных холлах устроил зимние сады. Сам барон разделил каждый из 64 свободных холлов на 9 равных квадратных комнат и в каждой из центральных комнат устроил бассейн, а остальные сделал жилыми. Барон хвастается, что ему удалось обойти все жилые комнаты, побывав в каждой по одному разу, и вернуться в исходную (в каждой стене между двумя соседними жилыми комнатами проделана дверь). Могут ли слова барона быть правдой?

Домашнее задание

1. Гуляя по Кенигсбергу, Леонард Эйлер захотел обойти город, пройдя по каждому мосту ровно один раз (см. рис.). Может ли он это сделать?