

## Деревья.

**Определение.** Будем давать несколько определений дерева:

1. Связный граф без циклов.
2. Граф, между любыми двумя вершинами которого существует единственный путь.
3. Связный граф, который при удалении любого ребра перестает быть связным.
4. Связный граф, количество ребер которого на 1 меньше количества вершин.

**Определение.** Висячей вершиной называется вершина дерева, которая имеет степень 1.

### Теоретические задачи

1. Докажите, что первое и второе определения дерева эквивалентны.
2. Докажите, что второе и третье определения дерева эквивалентны.
3. а) Докажите, что в каждом дереве (по первому определению) есть висячая вершина.  
б) Докажите, что в каждом дереве (по первому определению) есть хотя бы две висячих вершины.
4. Лемма о существовании остовного дерева (скелета). Докажите, что из каждого связного графа можно удалить некоторое число ребер так, чтобы получилось дерево.
5. Докажите, что первое и четвертое определения дерева эквивалентны.

## Деревья.

1. В графе 100 вершин и 99 ребер. Обязательно ли он является деревом?
2. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.
3. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника  $50 \times 60$  клеток. Какое наибольшее количество раз можно разрезать составляющие сетку веревочки, чтобы сетка не распалась на куски?
4. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?
5. В доску вбито 2016 гвоздей. Двое играют в игру, делая ходы по очереди. За ход можно соединить два еще не соединенных между собой гвоздя ниткой. Кто выиграет при правильной игре, если получивший замкнутую цепь  
а) проигрывает;  
б) выигрывает?
6. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из каждого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

### Домашнее задание.

1. Можно ли рёбра а)куба б) октаэдра раскрасить в два цвета так, чтобы между любыми двумя вершинами был путь как по рёбрам одного цвета, так и по ребрам другого цвета?