

## Алгебраические преобразования. Неравенства

1. Пусть  $x, y > 0$ . Докажите, что  $\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$
  2. Докажите, что при любом  $a$  имеет место неравенство  $3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2$ .
  3. а) Докажите для любых  $a, b$ , что  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .  
б) Докажите, что при любых  $x, y, z$  выполнено неравенство  $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$ .
  4. а) Докажите для любых  $a, b, c$ , что  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ .  
б) Докажите, что если  $x + y + z = 6$ , то  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$ .  
в) Докажите, что если положительные числа  $a, b, c$  такие, что  $ab + bc + ac > a + b + c$ , то верно  $a + b + c > 3$ .
  5. а) Пусть  $0 < y < x < 1$ . Докажите, что  $\frac{x-y}{1-xy} < 1$ .  
б) Пусть  $x, y$  - числа из отрезка  $[0, 1]$ . Докажите неравенство  $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leq 1$ .  
в) Пусть  $0 < x, y < 2$ . Докажите, что  $\frac{4-x-y}{x+y-xy} \geq 1$ .
  6. Докажите, что многочлен  $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$  при всех значениях  $x$  положителен.
  7. Неотрицательные числа  $x, y$  удовлетворяют условию  $x + y \leq 1$ . Докажите, что  $12xy \leq 4x(1 - y) + 9y(1 - x)$ .
  8. Пусть  $a, b, c$  - длины сторон треугольника. Докажите, что  $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$ .
  9. Пусть  $a, b, c, d \geq 0$ , причём  $c + d \leq a$ ,  $c + d \leq b$ . Докажите, что  $ad + bc \leq ab$ .
- Домашнее задание**
10. Пусть  $-1 < x, y < 1$ . Докажите, что  $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$ .

## Алгебраические преобразования. Неравенства

1. Пусть  $x, y > 0$ . Докажите, что  $\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$
  2. Докажите, что при любом  $a$  имеет место неравенство  $3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2$ .
  3. а) Докажите для любых  $a, b$ , что  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .  
б) Докажите, что при любых  $x, y, z$  выполнено неравенство  $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$ .
  4. а) Докажите для любых  $a, b, c$ , что  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ .  
б) Докажите, что если  $x + y + z = 6$ , то  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$ .  
в) Докажите, что если положительные числа  $a, b, c$  такие, что  $ab + bc + ac > a + b + c$ , то верно  $a + b + c > 3$ .
  5. а) Пусть  $0 < y < x < 1$ . Докажите, что  $\frac{x-y}{1-xy} < 1$ .  
б) Пусть  $x, y$  - числа из отрезка  $[0, 1]$ . Докажите неравенство  $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leq 1$ .  
в) Пусть  $0 < x, y < 2$ . Докажите, что  $\frac{4-x-y}{x+y-xy} \geq 1$ .
  6. Докажите, что многочлен  $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$  при всех значениях  $x$  положителен.
  7. Неотрицательные числа  $x, y$  удовлетворяют условию  $x + y \leq 1$ . Докажите, что  $12xy \leq 4x(1 - y) + 9y(1 - x)$ .
  8. Пусть  $a, b, c$  - длины сторон треугольника. Докажите, что  $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$ .
  9. Пусть  $a, b, c, d \geq 0$ , причём  $c + d \leq a$ ,  $c + d \leq b$ . Докажите, что  $ad + bc \leq ab$ .
- Домашнее задание**
10. Пусть  $-1 < x, y < 1$ . Докажите, что  $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$ .

## Алгебраические преобразования. Неравенства

1. Пусть  $x, y > 0$ . Докажите, что  $\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$
  2. Докажите, что при любом  $a$  имеет место неравенство  $3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2$ .
  3. а) Докажите для любых  $a, b$ , что  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .  
б) Докажите, что при любых  $x, y, z$  выполнено неравенство  $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$ .
  4. а) Докажите для любых  $a, b, c$ , что  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ .  
б) Докажите, что если  $x + y + z = 6$ , то  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$ .  
в) Докажите, что если положительные числа  $a, b, c$  такие, что  $ab + bc + ac > a + b + c$ , то верно  $a + b + c > 3$ .
  5. а) Пусть  $0 < y < x < 1$ . Докажите, что  $\frac{x-y}{1-xy} < 1$ .  
б) Пусть  $x, y$  - числа из отрезка  $[0, 1]$ . Докажите неравенство  $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leq 1$ .  
в) Пусть  $0 < x, y < 2$ . Докажите, что  $\frac{4-x-y}{x+y-xy} \geq 1$ .
  6. Докажите, что многочлен  $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$  при всех значениях  $x$  положителен.
  7. Неотрицательные числа  $x, y$  удовлетворяют условию  $x + y \leq 1$ . Докажите, что  $12xy \leq 4x(1 - y) + 9y(1 - x)$ .
  8. Пусть  $a, b, c$  - длины сторон треугольника. Докажите, что  $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$ .
  9. Пусть  $a, b, c, d \geq 0$ , причём  $c + d \leq a$ ,  $c + d \leq b$ . Докажите, что  $ad + bc \leq ab$ .
- Домашнее задание**
10. Пусть  $-1 < x, y < 1$ . Докажите, что  $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$ .

## Алгебраические преобразования. Неравенства

1. Пусть  $x, y > 0$ . Докажите, что  $\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$
  2. Докажите, что при любом  $a$  имеет место неравенство  $3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2$ .
  3. а) Докажите для любых  $a, b$ , что  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .  
б) Докажите, что при любых  $x, y, z$  выполнено неравенство  $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$ .
  4. а) Докажите для любых  $a, b, c$ , что  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ .  
б) Докажите, что если  $x + y + z = 6$ , то  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$ .  
в) Докажите, что если положительные числа  $a, b, c$  такие, что  $ab + bc + ac > a + b + c$ , то верно  $a + b + c > 3$ .
  5. а) Пусть  $0 < y < x < 1$ . Докажите, что  $\frac{x-y}{1-xy} < 1$ .  
б) Пусть  $x, y$  - числа из отрезка  $[0, 1]$ . Докажите неравенство  $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leq 1$ .  
в) Пусть  $0 < x, y < 2$ . Докажите, что  $\frac{4-x-y}{x+y-xy} \geq 1$ .
  6. Докажите, что многочлен  $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$  при всех значениях  $x$  положителен.
  7. Неотрицательные числа  $x, y$  удовлетворяют условию  $x + y \leq 1$ . Докажите, что  $12xy \leq 4x(1 - y) + 9y(1 - x)$ .
  8. Пусть  $a, b, c$  - длины сторон треугольника. Докажите, что  $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$ .
  9. Пусть  $a, b, c, d \geq 0$ , причём  $c + d \leq a$ ,  $c + d \leq b$ . Докажите, что  $ad + bc \leq ab$ .
- Домашнее задание**
10. Пусть  $-1 < x, y < 1$ . Докажите, что  $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$ .