Школа 1568. Группа 8-1. Занятие 10.

Алгебраические преобразования

1. Запишите без "двухэтажных"радикалов
   а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$
   б) $\sqrt{2\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$
   в) $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}$
2. Вычислите $\sqrt{2015\cdot 2017\cdot 2019\cdot 2021+16}$
3. Найдите наименьшее значение выражения $2a^2 \; - 8ab \; + 17b^2 \; - 16a \; - 4b \; + 2084$.
4. Докажите, что число а)999991 б)$2^{10}+5^{12}$ составное.
5. Вычислите $(1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)\cdot\ldots\cdot(1+2^{1024})$.
6. Докажите, что если $a+b=c+d$ и $a^2+b^2=c^2+d^2$, то $a^n+b^n=c^n+d^n$
7. Числа x, y, z таковы, что $xyz=1$. Вычислите значение выражения
$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+xz}.$$
8. Четыре подряд идущих числа перемножили и прибавили 1. Доказать, что получился точный квадрат.
9. Назовем целое число хорошим, если оно представляется в виде суммы 2 квадратов(5-хорошее $5=1^2+2^2$, 3-нет). Докажите, что
   а) удвоенное хорошее число будет хорошим
   б) произведение двух хороших будет хорошим.
10. Известно, что $a+b+c=0, \quad a^2+b^2+c^2=1$. Найдите $a^4+b^4+c^4$.
11. Докажите, что если
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0,$$
то
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (x, y, z, a, b, c - \text{отличны от } 0)$$
12. Натуральные числа $a, b,$ таковы, что $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$. Докажите, что каждое из трёх чисел ab, bc, ca является точным квадратом.
13. Выясните конечно или бесконечно число решений уравнения в натуральных числах. $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=3$

Школа 1568. Группа 8-1. Занятие 10.

Алгебраические преобразования

1. Запишите без "двухэтажных"радикалов
   а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$
   б) $\sqrt{2\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$
   в) $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}$
2. Вычислите $\sqrt{2015\cdot 2017\cdot 2019\cdot 2021+16}$
3. Найдите наименьшее значение выражения $2a^2 \; - 8ab \; + 17b^2 \; - 16a \; - 4b \; + 2084$.
4. Докажите, что число а)999991 б)$2^{10}+5^{12}$ составное.
5. Вычислите $(1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)\cdot\ldots\cdot(1+2^{1024})$.
6. Докажите, что если $a+b=c+d$ и $a^2+b^2=c^2+d^2$, то $a^n+b^n=c^n+d^n$
7. Числа x, y, z таковы, что $xyz=1$. Вычислите значение выражения
$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+xz}.$$
8. Четыре подряд идущих числа перемножили и прибавили 1. Доказать, что получился точный квадрат.
9. Назовем целое число хорошим, если оно представляется в виде суммы 2 квадратов(5-хорошее $5=1^2+2^2$, 3-нет). Докажите, что
   а) удвоенное хорошее число будет хорошим
   б) произведение двух хороших будет хорошим.
10. Известно, что $a+b+c=0, \quad a^2+b^2+c^2=1$. Найдите $a^4+b^4+c^4$.
11. Докажите, что если
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0,$$
то
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (x, y, z, a, b, c - \text{отличны от } 0)$$
12. Натуральные числа $a, b,$ таковы, что $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$. Докажите, что каждое из трёх чисел ab, bc, ca является точным квадратом.
13. Выясните конечно или бесконечно число решений уравнения в натуральных числах. $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=3$