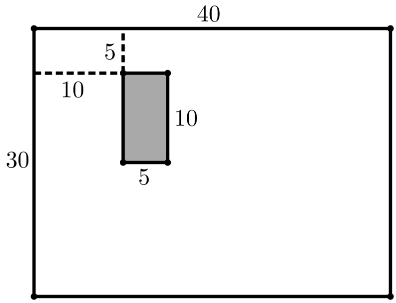
V Иранская олимпиада по геометрии
6 сентября 2018 г.

Начинающие

1. На рисунке изображен лист бумаги размером 40×30, внутри которого закрашен серый прямоугольник размером 10×5. Мы хотим вырезать серый прямоугольник из листа, используя четыре прямолинейных разреза. Каждым таким разрезом мы режем кусок бумаги от края до края, оставляем себе только часть, содержащую серый прямоугольник, и продолжаем резать уже её. Наша задача состоит в том, чтобы суммарная длина разрезов была как можно меньше. Как достичь этой цели, и какова минимальная суммарная длина разрезов? Укажите соответствующие разрезы и напишите их суммарную длину. Обосновывать ответ не нужно.



2. Выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ лежит внутри выпуклого шестиугольника $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$, причем

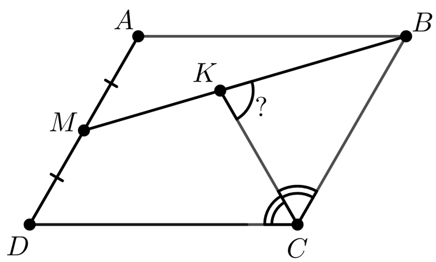
$$A_1A_2 \parallel B_1B_2,\ A_2A_3 \parallel B_2B_3,\ \ldots,\ A_6A_1 \parallel B_6B_1.$$

Оказалось, что каждый из шестиугольников $A_1B_2A_3B_4A_5B_6$ и $B_1A_2B_3A_4B_5A_6$ является несамопересекающимся. Докажите, что их площади равны.

3. На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$. Известно, что

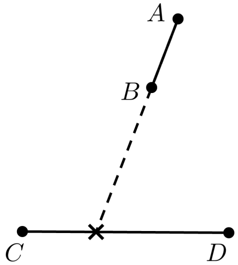
$$\angle D = 60^\circ,\ AD = 2,\ AB = \sqrt{3} + 1.$$

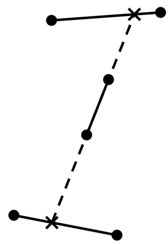
Точка M — середина отрезка AD. Отрезок CK является биссектрисой угла C. Найдите величину угла CKB.



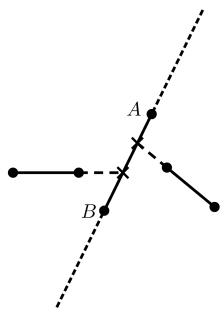
4. На плоскости расположена окружность ω. Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются ω и лежат внутри неё. Хорда AB окружности ω касается обеих окружностей, причем окружности лежат по разные стороны относительно хорды. Докажите, что $\angle O_1AO_2 + \angle O_1BO_2 > 90°$.

5. На плоскости расположено несколько попарно непересекающихся отрезков (отрезки не пересекаются даже в вершинах). Будем говорить, что отрезок AB *разбивает* отрезок CD, если продолжение отрезка AB пересекает отрезок CD в некоторой точке, отличной от точек C и D.





(a) Возможно ли такое расположение отрезков, что каждый отрезок, продолженный в обе стороны, разбивает ровно один отрезок с каждой из сторон?



(b) Назовем отрезок *окружённым*, если в каждой полуплоскости относительно него найдётся ровно один отрезок, который его разбивает (например, отрезок AB на рисунке является окружённым). Возможно ли такое расположение отрезков, при котором каждый отрезок окружён?

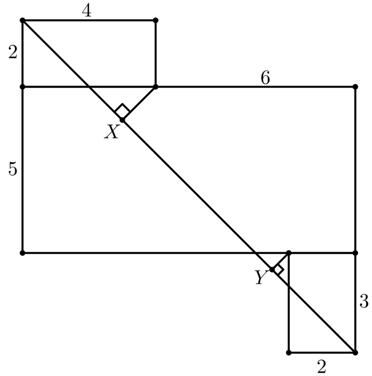
Продолжительность олимпиады — 240 минут.

V Иранская олимпиада по геометрии

6 сентября 2018 г.

Продолжающие

1. Фигура на рисунке состоит из трех прямоугольников. Возле некоторых из отрезков подписаны их длины. Найдите длину отрезка XY.



2. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Известно, что $\angle DAC = 90^\circ$ и $2\angle ADB = \angle ACB$. Докажите, что если $\angle DBC + 2\angle ADC = 180^\circ$, то $2AP = BP$.

3. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках A и B. Прямая O_1B вторично пересекает окружность ω_2 в точке C, прямая O_2A вторично пересекает окружность ω_1 в точке D. Пусть X — вторая точка пересечения AC и ω_1, а Y — вторая точка пересечения BD и ω_2. Докажите, что $CX = DY$.

4. Дан многогранник с треугольными гранями. Пусть P — произвольная точка, лежащая на его ребре, причем P не совпадает ни с серединой, ни с концами этого ребра. Положим $P_0 = P$. На каждом шаге точка P_i соединяется с центром масс одной из двух граней, содержащих точку P_i. Через P_{i+1} обозначим вторую точку пересечения полученной прямой с границей этой грани. Продолжим этот процесс для точки P_{i+1} и другой грани, содержащей P_{i+1}. Докажите, что, действуя подобным образом, пересечь все грани многогранника не удастся. (Центр масс треугольника — это точка пересечения его медиан.)

5. Про параллелограмм $ABCD$ известно, что $\angle DAC = 90^\circ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из A на DC, P — такая точка на прямой AC, что прямая PD касается описанной окружности треугольника ABD. Докажите, что $\angle PBA = \angle DBH$.

Продолжительность олимпиады — 270 минут.

V Иранская олимпиада по геометрии
6 сентября 2018 г.

Профессионалы

1. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Прямая PQ — их общая касательная, причем точка P лежит на ω_1, а точка Q — на ω_2. Рассмотрим произвольную точку X на окружности ω_1. Прямая AX вторично пересекает ω_2 в точке Y. Точка Y' на окружности ω_2, отличная от точки Y, такова, что $QY = QY'$. Обозначим вторую точку пересечения прямой $Y'B$ с окружностью ω_1 через X'. Докажите, что $PX = PX'$.

2. Угол A остроугольного треугольника ABC равен $45°$. Точки O и H — центр описанной окружности и ортоцентр треугольника ABC соответственно. Точка D — основание высоты, опущенной из вершины B. Обозначим через X середину дуги AH описанной окружности треугольника ADH, содержащей точку D. Докажите, что $DX = DO$.

3. Найдите все натуральные числа $n > 3$ такие, что существует выпуклый n-угольник, в котором каждая диагональ является серединным перпендикуляром по крайней мере к одной другой диагонали.

4. Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник, диагонали которого не перпендикулярны. Биссектрисы углов между диагоналями AC и BD пересекают отрезки AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Докажите, что если четырехугольник $KLMN$ вписанный, то и четырехугольник $ABCD$ вписанный.

5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Окружность, проходящая через точки A и B, касается отрезка CD в точке E. Другая окружность, проходящая через точки C и D, касается отрезка AB в точке F. Отрезки AE и DF пересекаются в точке G, отрезки BE и CF пересекаются в точке H. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников AGF, BHF, CHE, DGE лежат на одной окружности.

Продолжительность олимпиады — 270 минут.