

## Серия 22. Прямоугольная гипербола

*Прямоугольной* (иногда *равносторонней*) гиперболой называют гиперболу, у которой асимптоты перпендикулярны.

1. На прямоугольной гиперболе отмечены точки  $A$ ,  $A^*$  и  $B$ , причём точки  $A$  и  $A^*$  симметричны относительно центра гиперболы. Докажите, что прямые  $AB$  и  $A^*B$  пересекают одну из асимптот гиперболы под равными углами.
2. На прямоугольной гиперболе отмечены точки  $A$ ,  $A^*$ ,  $B$  и  $C$ , причём точки  $A$  и  $A^*$  симметричны относительно центра гиперболы. Докажите, что  $\angle BAC + \angle BA^*C \equiv 0$ .
3. Прямая  $\ell_A$  проходит через точку  $A$  и вращается вокруг неё с постоянной угловой скоростью. Прямая  $\ell_{A^*}$  проходит через точку  $A^*$  и вращается вокруг неё с такой же угловой скоростью, но в противоположном направлении. Докажите, что локусом точек пересечения прямых  $\ell_A$  и  $\ell_{A^*}$  служит либо прямоугольная гипербола с центром в середине отрезка  $AA^*$ , либо серпер к отрезку  $AA^*$ .
4. Прямоугольная гипербола проходит через вершины треугольника  $ABC$ . Докажите, что она проходит через ортоцентр треугольника. *Подсказка: рассмотрите четвёртую точку  $H^*$  пересечения гиперболы и окружности  $(ABC)$ .*
5. Прямоугольная гипербола проходит через вершины треугольника  $ABC$ . Докажите, что окружность девяти точек треугольника  $ABC$  проходит через центр гиперболы.
6. На прямоугольной гиперболе отмечены точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $P$ . Докажите, что проекции точки  $P$  на прямые  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  и центр гиперболы лежат на одной окружности.
7. На прямоугольной гиперболе отмечены точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $P$ . Обозначим через  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  точки пересечения пар прямых  $AP$  и  $BC$ ,  $BP$  и  $CA$ ,  $CP$  и  $AB$  соответственно. Докажите, что окружность  $(A_1B_1C_1)$  проходит через центр гиперболы.

**Теорема.** На плоскости дана неортоцентрическая четвёрка точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  в общем положении. Тогда на плоскости существует точка (*точка Штейнера*), через которую проходят следующие объекты.

- Окружности девяти точек треугольников  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$ ,  $ABC$ .
- Педальные окружности точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  относительно треугольников  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$ ,  $ABC$  соответственно.
- Чевианные окружности точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  относительно треугольников  $BCD$ ,  $CDA$ ,  $DAB$ ,  $ABC$  соответственно.

Эта точка — центр прямоугольной гиперболы, проходящей через точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .