

Серия 22. Прямоугольная гипербола

Прямоугольной (иногда *равносторонней*) гиперболой называют гиперболу, у которой асимптоты перпендикулярны.

1. На прямоугольной гиперболе отмечены точки A , A^* и B , причём точки A и A^* симметричны относительно центра гиперболы. Докажите, что прямые AB и A^*B пересекают одну из асимптот гиперболы под равными углами.
2. На прямоугольной гиперболе отмечены точки A , A^* , B и C , причём точки A и A^* симметричны относительно центра гиперболы. Докажите, что $\angle BAC + \angle BA^*C \equiv 0$.
3. Прямая ℓ_A проходит через точку A и вращается вокруг неё с постоянной угловой скоростью. Прямая ℓ_{A^*} проходит через точку A^* и вращается вокруг неё с такой же угловой скоростью, но в противоположном направлении. Докажите, что локусом точек пересечения прямых ℓ_A и ℓ_{A^*} служит либо прямоугольная гипербола с центром в середине отрезка AA^* , либо серпер к отрезку AA^* .
4. Прямоугольная гипербола проходит через вершины треугольника ABC . Докажите, что она проходит через ортоцентр треугольника. *Подсказка: рассмотрите четвёртую точку H^* пересечения гиперболы и окружности (ABC) .*
5. Прямоугольная гипербола проходит через вершины треугольника ABC . Докажите, что окружность девяти точек треугольника ABC проходит через центр гиперболы.
6. На прямоугольной гиперболе отмечены точки A , B , C , P . Докажите, что проекции точки P на прямые AB , BC , CA и центр гиперболы лежат на одной окружности.
7. На прямоугольной гиперболе отмечены точки A , B , C , P . Обозначим через A_1 , B_1 , C_1 точки пересечения пар прямых AP и BC , BP и CA , CP и AB соответственно. Докажите, что окружность $(A_1B_1C_1)$ проходит через центр гиперболы.

Теорема. На плоскости дана неортоцентрическая четвёрка точек A , B , C , D в общем положении. Тогда на плоскости существует точка (*точка Штейнера*), через которую проходят следующие объекты.

- Окружности девяти точек треугольников BCD , CDA , DAB , ABC .
- Педальные окружности точек A , B , C , D относительно треугольников BCD , CDA , DAB , ABC соответственно.
- Чевианые окружности точек A , B , C , D относительно треугольников BCD , CDA , DAB , ABC соответственно.

Эта точка — центр прямоугольной гиперболы, проходящей через точки A , B , C , D .