

Серия 21. Аффинные свойства коник

1. Даны эллипс и семейство попарно параллельных друг другу прямых. Каждая прямая семейства пересекает эллипс по отрезку. Докажите, что середины всех таких отрезков лежат на одной прямой.
2. На гиперболе отмечены точки A и B . Прямая AB пересекает асимптоты гиперболы в точках P и Q . Докажите, что $AP = BQ$.
3. На эллипсе с фокусами F_1 и F_2 отмечены точки A, B, C, D таким образом, что $\angle(AB, F_1F_2) + \angle(CD, F_1F_2) \equiv 0$. Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.
4. На плоскости нарисована парабола. С помощью циркуля и линейки постройте её вершину.
5. Окружность пересекает параболу в двух точках A и B . Касательные к параболе, восстановленные в точках A и B , пересекаются в точке X . Касательные к окружности, восстановленные в точках A и B , пересекаются в точке Y . Оказалось, что точка X лежит на окружности. Докажите, что прямая XY проходит через фокус параболы.
6. Окружность пересекает параболу по четырём точкам A, B, C, D . Докажите, что середина отрезка, соединяющего середины отрезков AB и CD , лежит на оси параболы.
7. На эллипсе зафиксирована точка A . Рассматриваются всевозможные пары точки B и C эллипса, для которых $\angle BAC = 90^\circ$. Докажите, что все прямые BC проходят через одну точку.