

## Серия 21. Аффинные свойства коник

1. Даны эллипс и семейство попарно параллельных друг другу прямых. Каждая прямая семейства пересекает эллипс по отрезку. Докажите, что середины всех таких отрезков лежат на одной прямой.
2. На гиперболе отмечены точки  $A$  и  $B$ . Прямая  $AB$  пересекает асимптоты гиперболы в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $AP = BQ$ .
3. На эллипсе с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  отмечены точки  $A, B, C, D$  таким образом, что  $\angle(AB, F_1F_2) + \angle(CD, F_1F_2) \equiv 0$ . Докажите, что точки  $A, B, C, D$  лежат на одной окружности.
4. На плоскости нарисована парабола. С помощью циркуля и линейки постройте её вершину.
5. Окружность пересекает параболу в двух точках  $A$  и  $B$ . Касательные к параболе, восстановленные в точках  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $X$ . Касательные к окружности, восстановленные в точках  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $Y$ . Оказалось, что точка  $X$  лежит на окружности. Докажите, что прямая  $XY$  проходит через фокус параболы.
6. Окружность пересекает параболу по четырём точкам  $A, B, C, D$ . Докажите, что середина отрезка, соединяющего середины отрезков  $AB$  и  $CD$ , лежит на оси параболы.
7. На эллипсе зафиксирована точка  $A$ . Рассматриваются всевозможные пары точки  $B$  и  $C$  эллипса, для которых  $\angle BAC = 90^\circ$ . Докажите, что все прямые  $BC$  проходят через одну точку.