Серия 19. Линейные функции

Числовая функция f на плоскости называется *линейной*, если выполнено одно из двух эквивалентных условий:

- Для любых точек A, B, C и вещественных λ и μ таких, что точка C делит отрезок AB в отношении $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\mu}{\lambda}$, верно равенство
$$f(C) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}f(A) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}f(B).$$
- Существуют вещественные числа a, b, c такие, что для любой точки A с координатами (x, y) верно
$$f(A) = ax + by + c.$$

Основные примеры линейных функций:

- $f(X) \equiv const$.
- $f(X)$ — ориентированное расстояние от точки X до фиксированной прямой ℓ.
- $f(X)$ — ориентированная площадь треугольника XBC, где B и C — фиксированные точки.

1. **(a)** Докажите, что множеством нулей линейной функции служит прямая, плоскость либо пустое множество.
(b) Докажите, что линейная комбинация линейных функций — вновь линейная функция.

2. Построив соответствующую линейную функцию, докажите, что основания трёх внешних биссектрис неравнобедренного треугольника лежат на одной прямой.

3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи AD и BC — в точке Q. Биссектрисы углов BAD и BCD пересекаются в точке X, биссектрисы углов ABC и ADC — в точке Y; наконец, внешние биссектрисы углов APC и AQC пересекаются в точке Z. Докажите, что точки X, Y, Z лежат на одной прямой.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. С центром в точке B построена окружность ω_B радиуса $\frac{1}{2}BB_1$; с центром в точке C построена окружность ω_C радиуса $\frac{1}{2}CC_1$. Прямая ℓ — общая внешняя касательная к окружностям ω_B и ω_C, не пересекающая треугольник ABC. Докажите, что инцентр треугольника, образованного прямыми AB, AC и ℓ, лежит на отрезке BC.

5. **(a)** (*Прямая Гаусса*) Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, продолжения сторон BC и AD — в точке F. Построив соответствующую линейную функцию, докажите, что середины отрезков AC, BD, EF лежат на одной прямой.
(b) (*Теорема Ньютона*) Использовав построенную линейную функцию, докажите, что в описанном четырехугольнике центр вписанной окружности лежит на прямой Гаусса этого четырёхугольника.

6. Даны две окружности ω_A и ω_B, лежащие вне друг друга. Рассматриваются всевозможные пары точек A и B такие, что $A \in \omega_A$, $b \in \omega_B$ и длины отрезков касательных из A к ω_B и из B к ω_A равны. Найдите *локус* (т. е. геометрическое место) середин всевозможных отрезков AB.

7. Внешние биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC с наименьшей стороной BC пересекаются в точке I_A. На отрезках BC_1, CB_1 взяли точки X и Y соответственно так, что отрезок XY проходит через I_A. Докажите, что отражения прямых CX и BY относительно осей CI_A и BI_A соответственно пересекаются на прямой B_1C_1.

8. Точки пересечения медиан треугольников $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ лежат на одной прямой. Докажите, что 27 треугольников $A_iB_jC_k$ можно разбить на две группы так, чтобы суммы площадей треугольников в группах были одинаковыми.