Серия 18. Лемма биссектрального треугольника

1. **(важная!)** Пусть BL_B, CL_C – биссектрисы треугольника ABC.

(a) Докажите, что для каждой точки на отрезке L_BL_C сумма расстояний от этой точки до прямых AB и AC равна расстоянию от нее до прямой BC.

(b) Как будет выглядеть утверждение задачи, если брать точку не на отрезке, а на прямой L_BL_C?

2. Используя первую задачу докажите, что прямая L_BL_C пересекает прямую BC в основании внешней биссектрисы угла A.

3. Внутри треугольника ABC находится точка T, расстояния от которой до сторон треугольника равны x, y, z. Найдите геометрическое место точек T таких, что из отрезков длинами x, y, z можно составить треугольник.

4. Известно, что в треугольнике ABC точка пересечения медиан M принадлежит отрезку L_BL_C. Докажите, что в таком случае для высот треугольника ABC имеет место равенство $h_a = h_b + h_c$.

5. Биссектриса AL_A треугольника ABC пересекает L_BL_C в точке T. Докажите, что $AT : TL_A = (AB + AC) : 2BC$.

6. (Болгария, 1997). Около треугольника ABC описана окружность Ω . Луч L_BL_C пересекает Ω в точке X. Докажите, что $\frac{1}{XB} = \frac{1}{XA} + \frac{1}{XC}$.

7. Центр O описанной около треугольника ABC окружности лежит на отрезке L_BL_C . Докажите, что расстояние AH от вершины до ортоцентра треугольника ABC равно сумме радиусов описанной около треугольника ABC и вписанной в него окружностей.

8. В треугольнике ABC прямая, проходящая через центры его описанной и вписанной окружностей, параллельна стороне BC. Докажите, что L_BL_C делит пополам высоту, проведенную из вершины A.

9. Центр O описанной около треугольника ABC окружности лежит на отрезке L_BL_C. Докажите, что $r_a = R$, где r_a — радиус вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC.