Серия 17. Точка Микеля вписанного четырёхугольника

1. Дан четырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность с центром в точке O. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи AD и BC — в точке Q, диагонали AC и BD — в точке R. Пусть M — точка Микеля четвёрки прямых AB, BC, CD, DA. Докажите перечисленные ниже утверждения.
(a) Точки M, P, Q лежат на одной прямой.
(b) Точки B, O, D, M лежат на одной окружности (как и точки A, O, C, M).
(c) Точки M и R инверсны относительно окружности $(ABCD)$.
(d) Точка M — проекция точки O на прямую PQ.
Нарисуйте картинки ко всем приведённым утверждениям в случае самопересекающегося четырёхугольника $ABCD$.

2. (*Классическая задача*) Окружность с центром O проходит через вершины B и C неравнобедренного треугольника ABC и пересекает стороны AB, AC второй раз в точках P и Q. Окружности (ABC) и (APQ) пересекаются в точках A и M. Докажите, что $\angle OMA = 90°$.

3. На полуокружности с диаметром AD и с центром в точке O отмечены точки B и C. Лучи BC и AD пересекаются в точке P. Окружности (AOB) и (COD) пересекаются в точках O и K. Докажите, что $\angle OKP = 90°$.

4. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке R. Окружности (ABR) и (CDR) пересекаются в точках R и X, окружности (BCR) и (DAR) пересекаются в точках R и Y. Докажите, что длина отрезка XY не превосходит расстояния от R до центра окружности $(ABCD)$.

5. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral and let AC and BD intersect at E and AB and CD at F. Let K be a point in the plane such that $ABKC$ is a parallelogram. Prove $\angle AFE = \angle CDK$.

6. Касательные к описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC, восстановленные в вершинах B и C, пересекаются в точке S. Точка T на прямой BC такова, что $\angle SAT = 90°$. На прямой ST отмечены точки B' и C' так, что $SB = SC = SB' = SC'$. Докажите, что треугольники ABC и $AB'C'$ подобны.

7. Let ABC be an acute scalene triangle inscribed in circle Ω. Circle ω, centered at O, passes through B and C and intersects sides AB and AC at E and D, respectively. Point P lies on major arc BAC of Ω. Prove that lines BD, CE, OP are concurrent if and only if triangles PBD and PCE have the same incenter.