

## Серия 12. Предрегиональный разнобой-2

1. В треугольнике  $ABC$  вневписанная окружность, лежащая напротив угла  $C$ , касается стороны  $AB$  в точке  $T$ . Пусть  $J$  — центр вневписанной окружности, лежащей напротив угла  $A$ , а  $M$  — середина  $AJ$ . Докажите, что  $MT = MC$ .
2. Пусть  $AA_1$  и  $BB_1$  — высоты неравнобедренного остроугольного треугольника  $AB$ ,  $M$  — середина  $AB$ . Описанные окружности треугольников  $AMA_1$  и  $BMB_1$ , пересекают прямые  $AC$  и  $BC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Докажите, что  $K$ ,  $M$  и  $L$  лежат на одной прямой.
3. Два четырехугольника  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  симметричны друг другу относительно точки  $P$ . Известно, что четырехугольники  $A_1BCD$ ,  $AB_1CD$  и  $ABC_1D$  вписанные. Докажите, что  $ABCD_1$  тоже вписанный.
4. В треугольнике  $ABC$  провели биссектрису  $CL$ . Точки  $A_1$  и  $B_1$  симметричны точкам  $A$  и  $B$  относительно  $CL$ ,  $A_2$  и  $B_2$  симметричны точкам  $A$  и  $B$  относительно  $L$ . Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей, описанных около треугольников  $AB_1B_2$  и  $BA_1A_2$ . Докажите, что углы  $O_1CA$  и  $O_2CB$  равны.
5. В неравнобедренном треугольнике  $ABC$  провели биссектрисы угла  $ABC$  и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую  $AC$  в точках  $B_1$  и  $B_2$  соответственно. Из точек  $B_1$  и  $B_2$  провели касательные к окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , отличные от прямой  $AC$ . Они касаются этой окружности в точках  $K_1$  и  $K_2$  соответственно. Докажите, что точки  $B$ ,  $K_1$  и  $K_2$  лежат на одной прямой.
6. На сторонах  $AB$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  взяты точки  $K$  и  $M$  соответственно, а на диагонали  $AC$  — точка  $L$  так, что  $ML = KL$ . Пусть  $P$  — точка пересечения отрезков  $MK$  и  $BD$ . Найдите угол  $KPL$ .
7. Во вписанном пятиугольнике  $ABCDE$   $AB = BC$ ,  $CD = DE$ . Отрезки  $AD$  и  $BE$  пересекаются в точке  $P$ , отрезок  $BD$  пересекает  $CA$  и  $CE$  в точках  $Q$  и  $T$  соответственно. Докажите, что треугольник  $PQT$  равнобедренный.
8. Точка  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . На луче  $CI$  отметили точку  $D$ . Точки  $K$  и  $L$  — основания перпендикуляров из точки  $I$  на прямые  $AB$  и  $AD$  соответственно. Прямая  $BI$  пересекает отрезок  $KL$  в точке  $P$ . Докажите, что угол  $BPD$  прямой.
9. Из точки  $A$  к окружности  $\omega$  проведена касательная  $AD$  и произвольная секущая, пересекающая окружность в точках  $B$  и  $C$  ( $B$  лежит между точками  $A$  и  $C$ ). Докажите, что окружность, проходящая через точки  $C$  и  $D$  и касающаяся прямой  $BD$ , проходит через фиксированную точку (отличную от  $D$ ).
10. Окружности  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  пересекаются в точках  $M$  и  $N$ . Через точку  $A$  окружности  $\Omega_1$  проведены прямые  $AM$  и  $AN$ , пересекающие окружность  $\Omega_2$  в точках  $B$  и  $C$ , а через точку  $D$  окружности  $\Omega_2$  — прямые  $DM$  и  $DN$ , пересекающие  $\Omega_1$  в точках  $E$  и  $F$ , причём точки  $A$ ,  $E$ ,  $F$  лежат по одну сторону от прямой  $MN$ , а  $D$ ,  $B$ ,  $C$  — по другую. Докажите, что если  $AB = DE$ , то точки  $A$ ,  $F$ ,  $C$  и  $D$  лежат на одной окружности, положение центра которой не зависит от выбора точек  $A$  и  $D$ .