Серия 10. Инверсия + симметрия

Рассмотрим для треугольника ABC следующее преобразование: композицию инверсии с центром A и радиусом $\sqrt{AB \cdot AC}$ и симметрию относительно биссектрисы угла BAC.

1. **(a)** Докажите, что композиция двух таких преобразований есть тождественное преобразование.
(b) Докажите, что образом центра вписанной окружности при данном преобразовании является центр вневписанной окружности, касающейся отрезка BC.
(c) Докажите, что образом центра описанной окружности треугольника ABC является точка, симметричная A относительно прямой BC.

2. Окружность ζ вписана в угол ABC треугольника ABC и касается его описанной окружности внутренним образом в точке P. Обозначим ее точки касания со сторонами AB и BC через X и Y; I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Пусть так же вневписанная в угол B окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке Q.
(a) Докажите, что $\angle ABP = \angle QBC$.
(b) Докажите, что I лежит на прямой XY.

3. Пусть Ω — описанная окружность треугольника ABC. Окружность с центром в точке O касается отрезка BC в точке P и дуги BC окружности Ω, не содержащей точку A в точке Q. Докажите, что, если $\angle BAO = \angle CAO$, то $\angle BAP = \angle CAQ$.

4. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совпадает с лучом OC, а луч OB — с OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Докажите, что $\angle BOE = \angle COF$.

5. Дан треугольник ABC. Одна окружность проходит через точку B и касается прямой AC в точке A, а вторая проходит через точку C и касается прямой AB в точке A. Докажите, что вторая точка пересечения этих окружностей лежит на симедиане треугольника ABC.

6. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (D лежит на отрезке AC), пересекающая описанную окружность ξ треугольника ABC в точках B и E. Окружность, построенная на DE, как на диаметре пересекает ξ в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

7. В окружность Ω вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуги AC окружности Ω соответственно. Пусть M — основания перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC, делит отрезок BP пополам.

8. Обозначим середины сторон AB, AC, BC треугольника ABC через C_0, B_0, A_0, а центр описанной окружности через O. Окружности, описанные около треугольников $A_0B_0C_0$ и BOC пересекаются в точках P и Q. Докажите, что $\angle BAP = \angle CAQ$.

9. Let ABC be a triangle with $AB < AC$. Let D be the intersection point of the internal bisector of angle BAC and the circumcircle of ABC. Let Z be the intersection point of the perpendicular bisector of AC with the external bisector of angle $\angle BAC$. Prove that the midpoint of the segment AB lies on the circumcircle of triangle ADZ.

10. В описанной окружности Ω треугольника ABC проведена хорда XY параллельная BC и располагающаяся между точкой A и прямой BC. Окружности ξ_1 и ξ_2 касаются хорды XY, окружности Ω и отрезков AB и AC соответственно, причем расположены они между прямыми XY и BC. Докажите, что общие внутренние касательные к ξ_1 и ξ_2 пересекаются на биссектрисе угла BAC.

11. Две окружности ω_1 и ω_2, содержащиеся внутри окружности ω, касаются ω в различных точках M и N соответственно. Окружность ω_1 проходит через центр окружности ω_2. Прямая, проходящая через точки пересечения ω_1 и ω_2 пересекает ω в точках A и B. Прямые MA и MB пересекают повторно ω_1 в точках P и Q. Докажите, что PQ касается ω_2.