Серия 8. Линейное движение точек

Определение. Объект движется *линейно*, если существует такой вектор $\vec{v}$, что за время t объект параллельно переносится на вектор $t \cdot \vec{v}$.

Утверждение. Точка $A(t)$ движется линейно тогда и только тогда, когда её координаты являются линейными функциями от t. Прямая, заданная уравнением $y = k(t) \cdot x + b(t)$, движется линейно тогда и только тогда, когда $k(t)$ не зависит от t, а $b(t)$ — линейная функция от t.

1. Докажите или опровергните:
(a) Середина отрезка, соединяющего две линейно движущиеся точки, движется линейно.
(b) Прямая постоянного направления, проведённая через линейно движущуюся точку, движется линейно.
(c) Прямая, проведённая через две линейно движущиеся точки, движется линейно.
(d) Точка пересечения линейно движущихся прямых движется линейно.

2. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB, AC в точках C_1, B_1 соответственно. На отрезках BC_1, AB_1 отмечены точки P и Q соответственно так, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1.

3. На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно так, что $BP = AQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника CPQ лежит на диагонали BD.

4. На стороне BC равностороннего треугольника ABC с центром I отмечена точка X. Из точки X опустили перпендикуляры XP и XQ на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что прямая XI делит отрезок PQ пополам.

Теорема. Если три линейно движущиеся точки лежат на одной прямой в три различных момента времени, то они всегда лежат на одной прямой.

5. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются точке H. Прямая ℓ, перпендикулярная стороне BC, пересекает отрезок BC в точке S и пересекает отрезки BB_1 и CC_1 в точках D и E. Докажите, что ортоцентр треугольника DEH лежит на прямой AS.

6. (**Прямая Гаусса**) На плоскости проведено четыре прямые общего положения. Докажите, что середины трёх отрезков, соединяющих точку пересечения двух прямых с точкой пересечения двух оставшихся (и так для трёх разбиений прямых на пары), лежат на одной прямой.

7. Треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. На прямой AO отмечена произвольная точка X. Окружности (ABX) и (ACX) второй раз пересекают прямые AC и AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что середина отрезка PQ равноудалена от точек B и C.

8. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Прямая XY пересекает окружность (ABC) в точках P и Q. Докажите, что середины отрезков BY, CX, XY и PQ лежат на одной окружности.