Серия 4. Поворотная гомотетия, часть 2

1. (*Свойство двойственности поворотной гомотетии*) Поворотная гомотетия с центром в точке S переводит точки A, B в точки A', B' соответственно. Докажите, что существует поворотная гомотетия с центром в S, переводящая точки A, A' в точки B, B' соответственно.

2. (**Основная лемма на сегодня**) Прямые AB и CD пересекаются в точке X. Окружности (ACX) и (BDX) пересекаются второй раз в точке S. Докажите, что существует поворотная гомотетия с центром в точке S, переводящая точки A, B в точки C, D соответственно.

3. (*Теорема Микеля*) Даны четыре прямые общего положения, они образуют четыре треугольника. Непосредственно из двух предыдущих задач выведите, что описанные окружности этих треугольников пересекаются в одной точке.

4. Две точки X и Y едут с постоянными скоростями по прямым ℓ_X и ℓ_Y соответственно, которые пересекаются в точке T; причём приезжают они в точку T неодновременно. Докажите, что всевозможные окружности (XYT) имеют общую точку, отличную от T.

5. Стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Точка M — середина AB, N — середина CD. Докажите, что центры окружностей (BCE), (ADE) и (MNE) лежат на одной прямой.

6. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ повернули относительно их середин на 90° против часовой стрелки, получились отрезки $A'B'$ и $C'D'$. Докажите, что $B'C' = A'D'$.

7. Let $ABCDE$ be a convex pentagon such that
$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \text{ and } \angle CBA = \angle DCA = \angle EDA.$$
Diagonals BD and CE meet at P. Prove that line AP bisects side CD.

8. Вписанная в неравнобедренный треугольник ABC окружность касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1. На прямой AB отмечена такая точка X, что $A_1X \perp B_1C_1$. Окружности (ABC) и (AB_1C_1) пересекаются второй раз в точке Z. Докажите, что $\angle XZC_1 = 90^\circ$.

9. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Точки P и Q на сторонах AB и AC соответственно таковы, что $\angle BOP = \angle ABC$ и $\angle COQ = \angle ACB$. Докажите, что отражение прямой BC относительно прямой PQ касается окружности (APQ).