Теорема о трех центрах гомотетии

Теорема. (*О трёх центрах гомотетии*) Если композицией трёх гомотетии является тождественное преобразование плоскости, то их центры лежат на одной прямой.

1. На плоскости нарисованы три непересекающихся неравных круга. Для каждой пары кругов отметили две точки пересечения общих касательных: одну — внешних, вторую — внутренних. **(a)** (*Теорема о трёх колпаках*) Докажите, что точки пересечения внешних общих касательных лежат на одной прямой. **(b)** Докажите, что если центры кругов не лежат на одной прямой, то все шесть отмеченных точек служат вершинами *четырёхстронника*, т. е. лежат по три на четырёх прямых.

2. На плоскости зафиксированы две неравные окружности α и β. Произвольная окружность ω касается их внутренним образом в точках A_ω и B_ω соответственно. Докажите, что все прямые $A_\omega B_\omega$ проходят через одну точку, не зависящую от выбора ω.

3. На продолжении стороны CD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) за точку D отмечена точка P, точка M — середина AD. Прямые PM и AC пересекаются в точке Q, PB и AD — в точке X, а BQ и AD — в точке Y. Докажите, что M — середина XY.

4. Продолжения сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q. На сторонах четырехугольника выбрали по точке так, что получился параллелограмм, причем одна пара его сторон параллельна PQ. Докажите, что центр параллелограмма лежит на одной из диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

5. Внутри треугольника ABC расположены три непересекающихся круга: ω_A, ω_B, ω_C. Каждый из них касается двух соответственных сторон треугольника. Круг ω касается внешним образом их всех в точках A', B', C' соответственно. Докажите, что прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

6. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB, DC пересекаются в точке P, а лучи AD, BC — в точке Q. Из точек P и Q внутрь углов APD и AQB проведено ещё по два луча, разбивающие четырёхугольник $ABCD$ на девять частей. Известно, что в части, примыкающие к вершинам B, C, D, можно вписать окружность. Докажите, что в часть, примыкающую к вершине A, также можно вписать окружность.

7. В угол с вершиной O вписаны две окружности ω_1 и ω_2. Луч с началом в точке O пересекает ω_1 в точках A_1 и B_1, а ω_2 — в точках A_2 и B_2 ($OA_1 < OB_1 < OA_2 < OB_2$). Окружность γ_1 касается внутренним образом окружности ω_1 и касательных к ω_2, проведённых из A_1. Окружность γ_2 касается внутренним образом окружности ω_2 и касательных к ω_1, проведённых из B_2. Докажите, что окружности γ_1 и γ_2 равны.

8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $AB+AD = CB+CD$. В треугольники ABC, CDA вписаны окружности с центрами I_1, I_2. Докажите, что прямые AC, BD, I_1I_2 пересекаются в одной точке.

---

9. Point P lies on side AB of a convex quadrilateral $ABCD$. Let ω be the incircle of triangle CPD, and let I be its incenter. Suppose that ω is tangent to the incircles of triangles APD and BPC at points K and L, respectively. Let lines AC and BD meet at E, and let lines AK and BL meet at F. Prove that points E, I, and F are collinear.