Равновеликость

В течение нескольких занятий мы будем заниматься площадями фигур. Для решения задач сегодняшнего занятия вам, если и понадобятся вычисления, то очень простые. Из формул для вычисления площадей потребуется в какой-то мере использовать только две: площади параллелограмма и треугольника (*при необходимости – напомнить*).

В предлагаемых задачах требуется либо доказать, что какие-то фигуры ***равновелики*** (то есть имеют равные площади), либо равновеликость фигур используется как раз для того, чтобы максимально упростить вычисления. Рассмотрим два простых примера.

Пример 1. Сторону AB треугольника ABC продолжили за вершину B и выбрали на луче AB точку A_1 так, что точка B – середина отрезка AA_1. Аналогично, сторону BC продолжили за вершину C и отметили на продолжении точку B_1 так, что C – середина BB_1. Так же продолжили сторону CA за вершину A и отметили на продолжении точку C_1 так, что A – середина CC_1. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 1 (см. рис. 1).

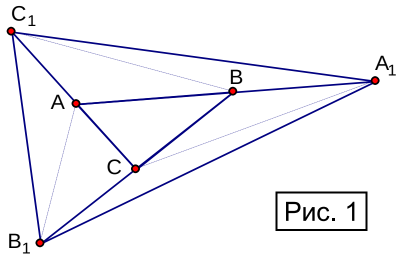
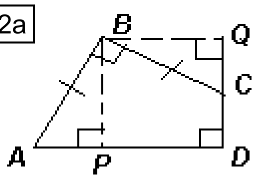


Рис. 1

Решение. Соединим точки B_1 и A, C_1 и B, A_1 и C. Площади треугольников ABC и C_1AB равны, так как у них равны основания AC_1 и AC и общая высота, проведенная из вершины B. Аналогично, равны площади треугольников ABC и A_1BC, ABC и B_1AC. Площади треугольников ABC_1 и BA_1C_1 равны, так как у них равны основания AB и BA_1 и общая высота, проведенная из вершины C_1. Аналогично, равны площади треугольников ACB_1 и AC_1B_1, CBA_1 и CB_1A_1. Таким образом, треугольник $A_1B_1C_1$ разбит на 7 треугольников площади 1.

Ответ: 7.

Рис. 2а



Пример 2. В четырехугольнике $ABCD$: $AB = BC$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ (см. рисунок). Найдите его площадь, если расстояние от вершины B до прямой AD равно 1.

Решение. <u>Первый способ</u>. Проведем перпендикуляры BP и BQ к прямым AD и CD (см. рис. 2а). Тогда из равенства прямоугольных треугольников ABP и CBQ (по гипотенузе и катету) следует, что площадь $ABCD$ равна площади квадрата $BPDQ$ со стороной 1.

По сути, треугольник CBQ получается из треугольника ABP поворотом вокруг точки B на 90° против часовой стрелки.

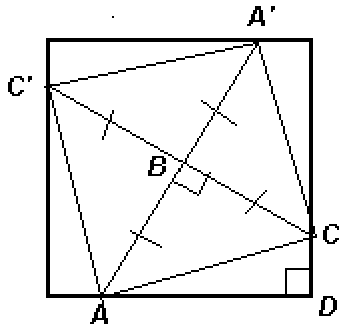


Рис. 2б

<u>Второй способ</u>. Продлим отрезки AB и CB на свою длину за точку B и получим квадрат $ACA'C'$ (*центральная симметрия относительно точки* B, см. рис. 2б). Опишем около этого квадрата прямоугольник, который также является квадратом, тогда площадь $ABCD$ равна четверти площади квадрата со стороной 2.

Задачам, при решении которых используются вспомогательные квадраты, будет посвящено отдельное занятие.

Ответ: 1.

Большая часть задач этого занятия придумана двумя замечательными математиками: Вячеславом Викторовичем Произволовым и Максимом Анатольевичем Волчкевичем. К их творчеству мы еще не раз обратимся в последующих занятиях.

Задач для самостоятельного решения предлагается много, так как часть из них – довольно простые, но полезные. В их расположении по нарастанию трудности я не уверен, поэтому вполне можно «перескакивать».

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. а) Параллелограммы *ABCD* и *BEFG* с общей вершиной *B* расположены так, что точка *C* лежит на отрезке *EF*, а точка *G* – на отрезке *AD*. Докажите, что эти параллелограммы равновелики.

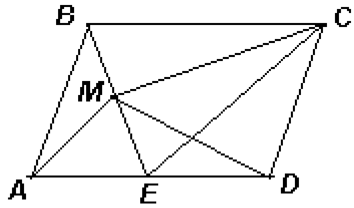
б) Точки *E* – середина боковой стороны *CD*, а точка *F* – середина большего основания *AD* трапеции *ABCD*. Отрезки *AE* и *BF* пересекаются в точке *O*. Докажите, что треугольник *AOB* и четырехугольник *DEOF* равновелики.

2. а) В трапеции *ABCD* (*AD* || *BC*) из точки *E* – середины *CD* провели перпендикуляр *EF* к прямой *AB*. Найдите площадь трапеции, если *AB* = 5, *EF* = 4.

б) В трапеции *ABCD* (*AD* || *BC*) расстояния от вершин *A* и *B* до прямой *CD* равны 7 и 1 соответственно. Найдите площадь трапеции, если *CD* = 5.

3. а) Противолежащие стороны шестиугольника *ABCDEF* равны и параллельны. Найдите площадь треугольника *ACE*, если площадь шестиугольника равна *S*.

б) Точки *K* и *L* – середины сторон *AB* и *BC* правильного шестиугольника *ABCDEF*. Отрезки *KD* и *LE* пересекаются в точке *M*. Площадь треугольника *DEM* равна 12. Найдите площадь четырехугольника *KBLM*.

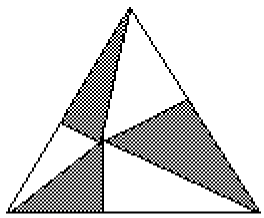


4. а) Внутри параллелограмма *ABCD* выбрана произвольная точка *P* и проведены отрезки *PA*, *PB*, *PC* и *PD*. Площади трех из образовавшихся треугольников равны 1, 2 и 3 (в каком-то порядке). Какие значения может принимать площадь четвертого треугольника?

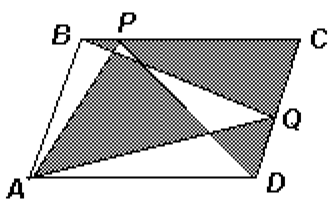
б) Внутри параллелограмма *ABCD* отмечена точка *M*. Прямая *BM* пересекает сторону *AD* в точке *E* (см. рисунок). Докажите, что треугольники *AMD* и *CME* равновелики.

5. а) Точка *O*, лежащая внутри выпуклого четырехугольника площади *S*, симметрично отражается относительно середин его сторон. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в полученных точках.

б) В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* отмечены середины противоположных сторон *BC* и *AD* – точки *M* и *N*. Диагональ *AC* проходит через середину отрезка *MN*. Найдите площадь *ABCD*, если площадь треугольника *ABC* равна *S*.

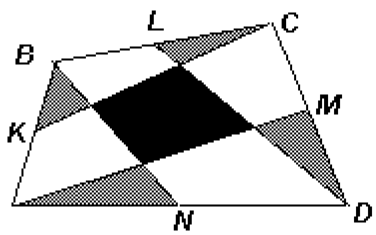


6. а) Внутри равностороннего треугольника отмечена точка, которая соединена отрезками с вершинами и из нее проведены перпендикуляры к сторонам (см. рисунок). Три из образовавшихся шести треугольников заштрихованы (через один). Докажите, что сумма площадей заштрихованных треугольников равна половине площади треугольника.



б) На сторонах *BC* и *CD* параллелограмма *ABCD* отмечены точки *P* и *Q*. Точку P соединили отрезками с вершинами *A* и *D*, а точку *Q* – с вершинами *A* и *B* (см. рисунок). Докажите, что площадь одной из закрашенных частей равна сумме площадей трех других.

в) Точки *K*, *L*, *M* и *N* – середины сторон выпуклого четырехугольника *ABCD* (см. рисунок). Докажите, что сумма площадей заштрихованных треугольников равна площади закрашенного четырехугольника.



7. а) В пятиугольнике *ABCDE*: *BC* || *AD*, *CD* || *BE*. Докажите, что треугольники *ABC* и *CDE* равновелики. б) В выпуклом пятиугольнике *ABCDE*: *BC* = *CD* = *AE* = 1, *AB* + *DE* = 1, $\angle ABC = \angle CDE = 90^\circ$. Найдите его площадь. в) В выпуклом пятиугольнике *ABCDE*: $\angle A = \angle C = 90^\circ$, *AB* = *AE*, *BC* = *CD*, *AC* = 1. Найдите площадь пятиугольника.