

Теорема Карно

Вы уже не раз сталкивались с задачами, в которых надо доказать, что три прямые пересекаются в одной точке (см., например, занятие «Прямые, содержащие высоты треугольника»). На этом и на следующем занятии мы расширим арсенал ваших возможностей для решения таких задач.

На занятии по теме «Теорема Пифагора и теорема, ей обратная» мы познакомились с принципом Карно. В чем его смысл?

Принцип замены разности квадратов наклонных на разность квадратов их проекций называется принципом Карно.

Этот результат был также сформулирован с точки зрения ГМТ.

Геометрическим местом точек M плоскости, для которых разность квадратов расстояний до двух данных точек A и B – постоянная величина, является прямая, перпендикулярная отрезку AB .

Помимо прочего, полученный результат помогает сформулировать и доказать теорему, которая часто применяется для доказательства того, что какие-то три перпендикуляра пересекаются в одной точке. Эта теорема также носит имя Лазаря Карно.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC . Отметим на прямых BC , CA и AB точки A' , B' и C' соответственно и восставим перпендикуляры в этих точках к прямым, на которых они лежат (см. рис. 1). Пусть эти перпендикуляры пересеклись в одной точке M . Выведем равенство, связывающее между собой расстояния от точек A' , B' и C' до вершин треугольника.

По принципу Карно запишем три равенства:

$$MC^2 - MB^2 = A'C^2 - A'B^2; \quad MB^2 - MA^2 = C'B^2 - C'A^2;$$

$$MA^2 - MC^2 = B'A^2 - B'C^2.$$

Сложив их почленно, получим:

$A'C^2 + C'B^2 + B'A^2 = A'B^2 + C'A^2 + B'C^2$ (показать на чертеже). Это есть необходимое условие пересечения трех таких перпендикуляров в одной точке.

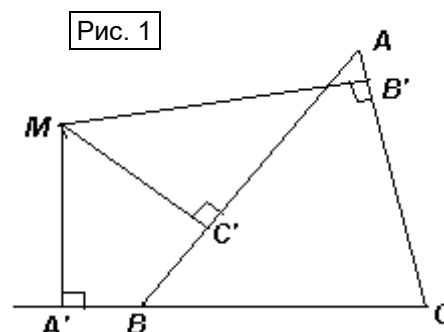
Является ли оно достаточным? Да, конечно. Докажем это.

Пусть M – точка пересечения перпендикуляров в точках A' и B' к BC и CA соответственно. Опустим перпендикуляр MC_1 на AB , тогда $A'C^2 + C_1B^2 + B'A^2 = A'B^2 + C_1A^2 + B'C^2$. Сравнивая два соотношения, получим, что $C'B^2 - C'A^2 = C_1B^2 - C_1A^2$, то есть точки C_1 и C' совпадают.

Таким образом, **если точки A' , B' и C' лежат на прямых BC , CA и AB соответственно, то перпендикуляры, восставленные из этих точек к этим прямым пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство $A'C^2 + C'B^2 + B'A^2 = A'B^2 + C'A^2 + B'C^2$.**

Это утверждение и называется **теоремой Карно**, а записанное равенство называется **соотношением Карно**. Его иногда пишут по-другому, перенеся все слагаемые в одну часть.

Все задачи, предложенные ниже, так или иначе связаны с пересечением перпендикуляров в одной точке. Возможно, что для решения каких-то из них теорема Карно и не потребуется, но в большинстве случаев ее использовать удобно. В нескольких задачах необходимость ее применения сформулирована в явном виде.



Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. а) Докажите, что перпендикуляры, опущенные из произвольных точек плоскости A' , B' и C' на прямые BC , CA и AB соответственно пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство $A'C^2 + C'B^2 + B'A^2 = A'B^2 + C'A^2 + B'C^2$ (**обобщение теоремы Карно**).
б) Объясните, как используя это обобщение, доказать, что высоты любого треугольника пересекаются в одной точке.
2. а) Известно, что в выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$: $AB = BC$, $CD = DE$ и $EF = FA$. Докажите, что биссектрисы углов B , D и F пересекаются в одной точке.
б) Дан треугольник ABC . Точки A_1 , B_1 и C_1 таковы, что $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1 , B_1 и C_1 на прямые BC , CA и AB соответственно, пересекаются в одной точке.
в) Даны три попарно пересекающиеся окружности. Докажите, что три их общие хорды пересекаются в одной точке (**лемма о трех хордах**).
г) Объясните, как использовать утверждение задачи 2в для доказательства пересечения трех высот треугольника в одной точке еще одним способом.
3. Докажите, что если перпендикуляры, опущенные из точек A_1 , B_1 и C_1 на прямые BC , AC и AB соответственно, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек A , B и C на прямые B_1C_1 , A_1C_1 и A_1B_1 соответственно, также пересекаются в одной точке (**теорема Штейнера**).
4. а) Около треугольника ABC описана окружность. A_1 – точка пересечения ее с прямой, параллельной BC и проходящей через вершину A . Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Из точек A_1 , B_1 и C_1 опустили перпендикуляры на прямые BC , CA и AB соответственно. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке.
б) Окружность пересекает сторону AB треугольника ABC в точках C_1 и C_2 , сторону BC – в точках A_1 и A_2 , сторону CA – в точках B_1 и B_2 . Известно, что перпендикуляры к сторонам AB , BC и CA , восстановленные в точках C_1 , B_1 и A_1 соответственно, пересекаются в одной точке. Докажите, что перпендикуляры к этим сторонам, восстановленные в точках C_2 , B_2 и A_2 соответственно, также пересекаются в одной точке.
5. Докажите, что прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.
6. а) Докажите, что перпендикуляры, проведенные из центров вневписанных окружностей к тем сторонам треугольника ABC , которых эти окружности касаются, пересекаются в одной точке. б) Переформулируйте доказанное утверждение для треугольника с вершинами в центрах вневписанных окружностей и объясните другой способ доказательства этого факта.
7. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 . Через точки A_1 , B_1 и C_1 проведены прямые, соответственно параллельные OA , OB и OC , где O – центр окружности, описанной около треугольника ABC . Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.
8. Пусть ABC – равносторонний треугольник, P – произвольная точка. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вписанных окружностей треугольников PAB , PBC и PCA на прямые AB , BC и CA соответственно, пересекаются в одной точке.
9. Докажите, что перпендикуляры, восстановленные из оснований биссектрис треугольника, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда треугольник – равнобедренный.