Задачи на наименьшее и наибольшее значения

Продолжим заниматься экстремальными задачами. На этом занятии вам встретятся задачи, в которых потребуется определять как наименьшее, так и наибольшее значение в различных геометрических конструкциях, причем эти значения связаны не только с расстояниями.

Пример. Из точки M описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и AC. При каком положении точки M длина PQ – наибольшая?

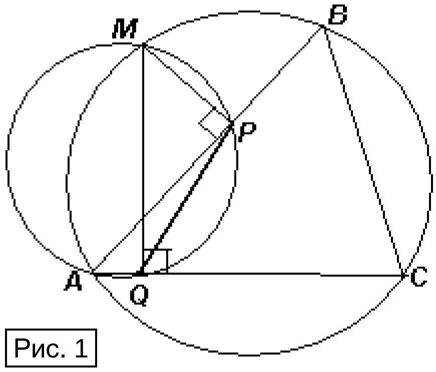

Рис. 1

Решение. Так как $\angle APM = \angle AQM = 90°$, то точки A, M, P и Q лежат на одной окружности с диаметром AM (см. рис. 1). По следствию из теоремы синусов $PQ = AM \cdot \sin\angle BAC$. Так как угол BAC – фиксирован, то наибольшее значение PQ достигается при наибольшем значении AM, то есть в случае, когда AM – диаметр данной окружности.

Ответ: M – точка, диаметрально противоположная точке A.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Какое наименьшее значение может принимать периметр неравнобедренного треугольника с целыми длинами сторон?

2. Какой из треугольников с данной стороной и данной высотой, проведенной к этой стороне, имеет наименьший периметр?

3. В треугольнике ABC: $AB = BC = 1$, $\angle ABC = 15°$. На сторонах AB и BC отмечены точки D и E соответственно. Найдите наименьшее значение длины ломаной AED.

4. В треугольнике ABC: $AB = BC = 1$, $\angle ABC = 20°$. На сторонах AB и BC отмечены точки D и E соответственно. Найдите наименьшее значение длины ломаной $AEDC$.

5. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана произвольная точка M и из нее опущены перпендикуляры MK и MP на катеты этого треугольника. При каком положении точки M длина отрезка PK будет наименьшей?

6. Дан треугольник ABC. Найдите на прямой AB такую точку M, для которой сумма радиусов описанных окружностей треугольников ACM и BCM будет наименьшей.

7. Дан треугольник ABC. Через вершину B проведите прямую так, чтобы сумма расстояний до нее от вершин A и C была наибольшей.

8. Внутри окружности с центром O дана точка A. а) Через точку A проведите хорды наибольшей и наименьшей длины. б) Найдите на окружности точку M, для которой угол OMA – наибольший.

9. На одной из сторон острого угла XOY отмечены точки A и B. а) Укажите на другой стороне угла точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом. б) Объясните, как построить эту точку.

10. На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром O. Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно, а длины этих сторон равны соответственно b и a. Найдите наибольшее значение суммы $OM + ON$, если угол ACB является переменной величиной.