12.02.19

Две пересекающиеся окружности

На этом занятии нам опять потребуются все основные теоремы, связанные с углами в окружности: 1) теорема о вписанном угле и ее следствие; 2) теорема об угле между касательной и хордой; 3) необходимые и достаточные условия того, чтобы четырехугольник был вписанным в окружность (*три варианта*); 4) ГМТ, из которых данный отрезок виден под заданным углом.

Во всех задачах этого занятия будет в том или ином виде присутствовать конструкция из двух пересекающихся окружностей.

Пример. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AQ, пересекающие вторую окружность в точках B и C. Докажите, что: а) длина отрезка BC не зависит от выбора точки A; б) касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC.

Решение. Возможны два случая расположения точки A (см. рис. 1 а, б).

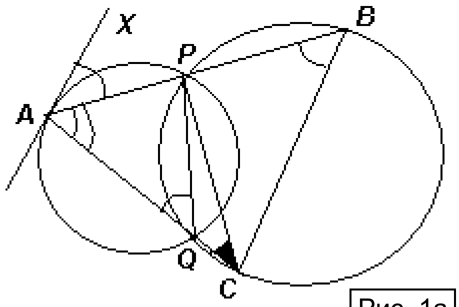

Рис. 1а

а) Достаточно доказать, что все такие отрезки BC стягивают равные дуги. Рассмотрим угол BPC, опирающийся на дугу BC. Он является внешним для треугольника APC, значит, $\angle BPC = \angle PAC + \angle PCA$, а оба этих угла постоянны, так как опираются на фиксированные дуги данных окружностей (на рис. 1б $\angle PCA = 180° - \angle PCQ$, который фиксирован).

б) Пусть AX – касательная к окружности. Используя теорему об угле между касательной и хордой и тот факт, что точки B, C, P и Q лежат на одной окружности, получим: $\angle PBC = \angle PQA = \angle PAX$. Следовательно, $AX \parallel BC$.

Можно также использовать антипараллельность отрезков BC и PQ по отношению к данным секущим.

Почти во всех задачах этой конструкции будут возможны два случая расположения. Если они аналогичны, то для экономии времени вы можете рассматривать только один из них.

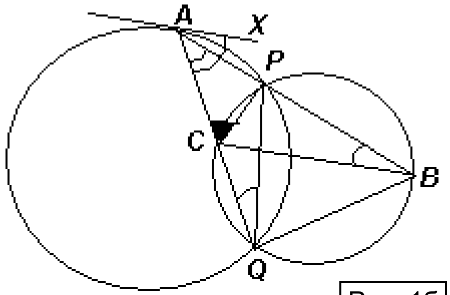

Рис. 1б

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B. Докажите, что величина угла AQB не зависит от выбора секущей.

2. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку P проведена секущая, которая пересекает окружности в точках A и B, а через точку Q – секущая, которая пересекает окружности в точках C и D соответственно. Докажите, что:
а) $\angle AQB = \angle CPD$; б) $AC \parallel BD$; в) $AC = BD$ тогда и только тогда, когда $AB \parallel CD$.

3. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена секущая, которая пересекает окружности в точках C и D. Через точки C и D проведены касательные к окружностям, которые пересекаются в точке E. Докажите, что:
а) четырехугольник $BCED$ – вписанный;
б) величина угла CED не зависит от выбора секущей.

4. На хорде AB окружности с центром O выбрана произвольная точка C. Через точки A, O и C проведена окружность, которая пересекает данную окружность в точке D. Докажите, что треугольник BCD – равнобедренный.

5. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, пересекающая отрезок PQ, последовательно пересекает эти окружности в точках A, B, C и D. Докажите, что $\angle APB = \angle CQD$.

6. Две окружности одинакового радиуса пересекаются в точках *A* и *B*. Произвольная прямая, проходящая через точку *B*, пересекает еще раз эти окружности в точках *X* и *Y*. Найдите геометрическое место середин отрезков *XY*.

7. Две окружности пересекаются в точках *P* и *Q*. Через точку *P* проведена секущая, которая пересекает окружности в точках *A* и *B*. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника *AQB*.

8. Две окружности с центрами *O* и *O*’ пересекаются в точках *P* и *Q*. Через произвольную точку *X* окружности с центром *O* проведены прямые *XP* и *XQ*, которые пересекают окружность с центром *O*’ в точках *Y* и *Z* соответственно. Рассматриваются все треугольники *XYZ*.

1) Докажите, что: а) высоты; б) биссектрисы; в)* медианы всех таких треугольников, проведенные из точки *X*, проходят через одну и ту же точку.

2) Найдите положение точки X, для которого треугольник *XYZ* имеет наибольшую площадь.

3)* Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников *XYZ*.

4)* Пусть окружность, описанная около треугольника *XYZ*, вторично пересекает окружность с центром *O* в точке *D*. Докажите, что угол *XDO*’ – прямой.

9. Две окружности пересекаются в точках *P* и *Q*. Общая касательная к этим окружностям касается их в точках *A* и *B*. Докажите, что:

а) прямая *PQ* пересекает отрезок *AB* в его середине;

б) равны радиусы окружностей, описанных около треугольников *APB* и *AQB*;

в) окружность, описанная около одного из этих треугольников, проходит через ортоцентр другого треугольника.