29.01.19

Геометрическое место точек

На этом и на следующем занятии мы займемся задачами на поиск геометрических мест точек (ГМТ), обладающих теми или иными свойствами. Для начала вспомним, что такое ГМТ.

Определение. ГМТ, обладающих заданным свойством, – это фигура, состоящая из тех и только тех точек, для которых это свойство выполняется.

Поэтому, найдя искомое ГМТ – фигуру *F*, надо доказать два взаимно обратных утверждения:

А) Любая точка, принадлежащая *F*, обладает указанным свойством.

Б) Любая точка, обладающая указанным свойством, принадлежит *F*.

Почему вместо Б) можно доказывать, что любая точка, не принадлежащая *F*, указанным свойством не обладает (*что иногда бывает удобнее*)?

[Метод «от противного, основанный на том, что $A \Rightarrow B \Leftrightarrow$ не $B \Rightarrow$ не A]

В ряде случаев можно не доказывать два утверждения, а использовать цепочку равносильных утверждений!

Простейшие ГМТ на плоскости.

1) ГМТ, находящихся на данном расстоянии от данной точки;
2) ГМТ, равноудаленных от двух данных точек;
3) ГМТ, находящихся на данном расстоянии от данной прямой;
4) ГМТ, равноудаленных от двух данных прямых (*два случая*);
5) ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом;
6) ГМТ, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна.

При решении задач желательно научиться грамотно использовать уже известные ГМТ, рационально проводить рассуждения, используя равносильность там, где это возможно. Самое важное – делать правильные выводы из того, какая величина получается фиксированной. Рассмотрим это на двух простых примерах.

Пример 1. Дан отрезок *AB*. Найдите ГМТ *X* таких, что: $\angle XAB > \angle XBA$.

Решение. Заданное свойство равносильно тому, что в треугольнике *XAB* выполняется неравенство $XB > XA$. Тогда, учитывая 2), ***искомым ГМТ является полуплоскость с границей m, в которой лежит точка A, не включающая границу и точки прямой AB*** (см. рис. 1). Для точек этой полуплоскости выполняется требуемое неравенство, а для остальных точек плоскости оно не выполняется.

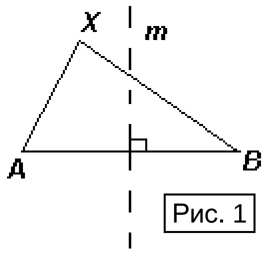
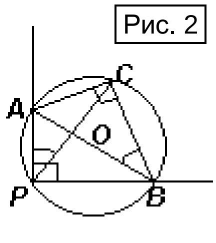


Рис. 1

Пример 2. Вершины *A* и *B* прямоугольного треугольника *ABC* ($\angle C = 90°$) скользят по сторонам прямого угла *P* (*C* не совпадает с *P*). По какой траектории движутся: а) середина *AB*; б) вершина *C*)?

Решение. Пусть *P* – вершина данного прямого угла, *O* – середина *AB* (см. рис. 2). Тогда: а) $PO = \frac{1}{2}AB$ – постоянная величина, значит, ***точка O движется по окружности***; б) четырехугольник *ACBP* – вписанный, следовательно, $\angle APC = \angle ABC$, который фиксирован. Следовательно, ***точка C движется по прямой***.

Рис. 2



Если бы речь шла о поиске ГМТ, то ГМТ O – четверть окружности с центром P и радиусом $\frac{1}{2}AB$*, лежащая внутри угла P, а ГМТ C – отрезок указанной прямой, лежащий внутри угла P и* $CA \le PC \le CB$ *(или наоборот).*

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Окружность радиуса R катится по прямой. По какой траектории движется ее центр?

2. Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите ГМТ M таких, что $AM + BM \leq CM + DM$.

3. Пусть O – центр равностороннего треугольника ABC. Найдите ГМТ M, удовлетворяющих следующему условию: любая прямая, проведенная через точку M, пересекает хотя бы один из двух отрезков: AB или CO.

4. A и B – фиксированные точки на плоскости. Найдите ГМТ M, для которых A, B и M являются вершинами равнобедренного треугольника.

5. Даны две перпендикулярные прямые и отмечена точка M, не принадлежащая им. По одной прямой движется точка P, а по другой – точка Q так, что угол PMQ всегда остается прямым. Найдите ГМТ, симметричных M относительно прямой PQ.

6. Даны две перпендикулярные прямые и точка C, не принадлежащая ни одной из них. Рассмотрим все прямоугольники $CDME$ такие, что вершина D лежит на одной из данных прямых, а вершина E – на другой. Найдите ГМТ M.

7. Точки P и Q движутся с одинаковой постоянной скоростью v по двум прямым, пересекающимся в точке O. Докажите, что на плоскости существует точка A, расстояния от которой до точек P и Q в любой момент времени равны.

8. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На стороне AB выбирается точка K, а на стороне BC – точка L так, что $AK + CL = \frac{1}{2}AB$. Найдите геометрическое место середин отрезков KL.

9. На биссектрисе данного угла зафиксирована точка. Рассматриваются всевозможные равнобедренные треугольники, у которых вершина находится в этой точке, а концы оснований лежат на разных сторонах этого угла. Найдите геометрическое место середин оснований таких треугольников.