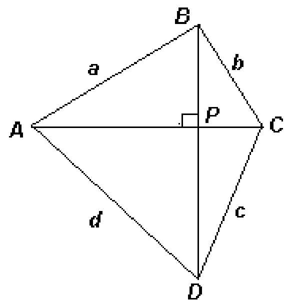
Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями

Напомню, что на прошлом занятии ,был сформулирован принцип Карно, из которого следует, что ***геометрическим местом точек плоскости, для которых разность квадратов расстояний до двух данных точек A и B – постоянная величина, является прямая, перпендикулярная отрезку AB***.



Одна из задач, которую многие решили, формулировалась так: ***диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противолежащих сторон.***

Действительно, непосредственно из этого утверждения следует, что $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = d^2 - c^2 \Leftrightarrow BD \perp AC$ (см. рисунок).

Это утверждение верно как для выпуклого, так и для невыпуклого четырехугольника, но сегодня мы будем рассматривать только выпуклые четырехугольники, так как, помимо перпендикулярности диагоналей, они, как правило, будут еще и вписанными.

В связи с появлением окружности, вам потребуется также вспомнить: 1) теорему о вписанном угле; 2) необходимое и достаточное условие того, чтобы четырехугольник был вписанным; 3) теорему об угле между касательной и хордой.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что если четырехугольник $ABCD$ с перпендикулярным диагоналям вписан в окружность с центром O, то $\angle AOB + \angle COD = 180°$.

2. Докажите, что во вписанном четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями расстояние от центра описанной окружности до стороны равно половине противолежащей стороны.

3. Через вершины вписанного четырехугольника проведены касательные к его описанной окружности. Докажите, что точки их попарного пересечения являются вершинами вписанного четырехугольника тогда и только тогда, когда диагонали исходного четырехугольника взаимно перпендикулярны.

4. Докажите, что во вписанном четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями прямая, проведенная из точки пересечения диагоналей перпендикулярно стороне делит противолежащую сторону пополам.

5. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность радиуса R, перпендикулярны и пересекаются в точке P. а) Докажите, что $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 4R^2$. б) Найдите сумму квадратов сторон четырехугольника $ABCD$.

6. Прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность, M – произвольная точка этой окружности (не совпадающая с вершинами). Докажите, что из отрезков MA, MB, MC и MD можно составить контур четырехугольника с перпендикулярными диагоналями, вписанного в ту же окружность.

7. Докажите, что диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда: а) середины его сторон лежат на одной окружности; б) .основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения его диагоналей на стороны, лежат на одной окружности.

8. Докажите, что если четырехугольник с перпендикулярными диагоналями является вписанным, то окружности, указанные в задачах 7а и 7б, совпадают.

9. Пусть $ABCD$ – вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, P – точка их пересечения. Докажите, что: а) четырехугольник, образованный проекциями P на стороны данного четырехугольника, является описанным около окружности с центром P; б) стороны этого четырехугольника соответственно параллельны сторонам четырехугольника, образованного попарным пересечением касательных в вершинах данного четырехугольника (см. задачу 3).

10. а) Пусть проекции некоторой точки T на стороны четырёхугольника $ABCD$ лежат на одной окружности. Докажите, что прямые, симметричные прямым AT, BT, CT и DT относительно биссектрис соответствующих углов, пересекаются в одной точке.

б) На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки C' и B' соответственно так, что $BB' \perp CC'$. Точка X внутри треугольника такова, что $\angle XBC = \angle B'BA$, $\angle XCB = \angle C'CA$. Докажите, что $\angle B'XC' = 90° - \angle A$.