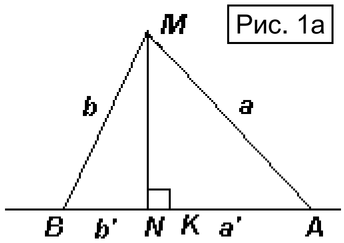
15.01.19

Теорема Пифагора и принцип Карно

Все задачи этого занятия будут так или иначе связаны с теоремой Пифагора или с теоремой, ей обратной. Сформулируйте обратную теорему. Как она доказывается? [*Методом от противного*]

Во многих задачах требуется доказать перпендикулярность каких-либо прямых. Иногда для этого хватает этой теоремы, в других случаях эта перпендикулярность «вылезает» из пересечения высот какого-то треугольника (этому было посвящено отдельное занятие). Сегодня мы рассмотрим еще один, достаточно «мощный» метод доказательства перпендикулярности.

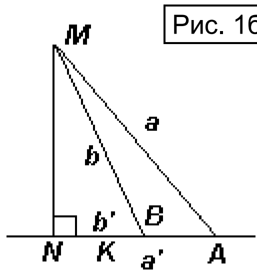
Рис. 1а



Дана прямая, к которой из одной точки проведены две наклонные *MA* и *MB* (см. рис. 1а, б). Пусть длины этих наклонных равны *a* и *b*, а длины их проекций равна *a*' и *b*'.

1) Докажите, что $a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2$. 2) Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

Рис. 1б



[1) Рассмотрим точку *N* – ортогональную проекцию точки *M* на прямую *AB*. Применив теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам *AMN* и *BMN*, получим равенство, равносильное требуемому. 2) Если для точки *K*, лежащей на прямой *AB*, выполняется равенство: $a^2 - b^2 = KA^2 - KB^2$, то она является ортогональной проекцией точки *M* на *AB*.

Из равенства, данного в условии, и равенства, доказанного в пункте 1), следует, что $NA^2 - NB^2 = KA^2 - KB^2 \Leftrightarrow (NA - NB)(NA + NB) = (KA - KB)(KA + KB)$. Значит, если $N \in [AB]$, то $NA - NB = KA - KB$, а если $N \notin [AB]$, то $NA + NB = KA + KB$. В обоих случаях $N \equiv K$]

Принцип замены разности квадратов наклонных на разность квадратов их проекций называется принципом Карно.

Эта фамилия вам наверняка знакома. Французский математик, механик, военный инженер, государственный деятель Лазарь Карно (1753 – 1823), ученик Гаспара Монжа (создателя начертательной геометрии), занимался, в том числе, и проблемами элементарной геометрии.

Полученный результат можно сформулировать на языке ГМТ.

Геометрическим местом точек M плоскости, для которых разность квадратов расстояний до двух данных точек A и B – постоянная величина, является прямая, перпендикулярная отрезку AB.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Катеты прямоугольного треугольника равны *a* и *b*, его гипотенуза равна *c*, а высота, проведенная к гипотенузе, равна *h*. Докажите, что треугольник со сторонами *a* + *b*, *h* и *c* + *h* также является прямоугольным.

2. Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов их длин равна квадрату суммы длин оснований.

3. а) Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противолежащих сторон.

б) Даны четыре палочки, из которых можно составить контур четырехугольника с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что из них также можно составить контур четырехугольника с двумя прямыми углами.

4. Даны два лоскута материи, имеющие форму квадратов (их размеры – различны). Каким образом их нужно раскроить, образовав не более пяти кусков, чтобы из всех получившихся кусков можно было сшить скатерть, также имеющую форму квадрата?

5. Дан треугольник ABC. Постройте отрезок, который разобьет его на два треугольника с одинаковой суммой квадратов сторон.

6. Докажите, что если четырехугольник с перпендикулярными диагоналями является описанным, то он является дельтоидом (*дельтоид – четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, симметричный относительно одной из диагоналей*).

7. В шестиугольнике $ABCDEF$: углы A и C – прямые, $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Докажите, что прямые DF и BE перпендикулярны.

8. Через вершины B и C треугольника ABC перпендикулярно прямой BC проведены прямые b и c соответственно. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC пересекают прямые b и c соответственно в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна медиане AM треугольника ABC.

9. H – ортоцентр равнобедренного треугольника ABC. На боковых сторонах AB и BC отмечены точки M и K соответственно так, что угол KMH – прямой. Докажите, что из отрезков AK, CM и MK можно составить прямоугольный треугольник.

10. Пусть M – середина хорды AB окружности с центром O. Точка K симметрична точке M относительно O, P – произвольная точка окружности. Перпендикуляр к прямой AB в точке A и перпендикуляр к прямой PK в точке P пересекаются в точке Q. Точка H – основание перпендикуляра, опущенного из P на AB. Докажите, что прямая QB делит отрезок PH пополам.