

### Угол между радиусом описанной окружности и стороной треугольника

Сформулируем и докажем **основной факт**, выражающий связь между двумя углами: углом между радиусом описанной окружности и стороной треугольника и углом треугольника. Знание этого факта помогает решить много геометрических задач.

**Пусть  $O$  – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Тогда  $\angle OCA = 90^\circ - \angle ABC$ .**

**Доказательство.** Пусть  $K$  – середина стороны  $AC$  (см. рис.), тогда треугольник  $AOC$  – равнобедренный, поэтому  $OK \perp AC$ .

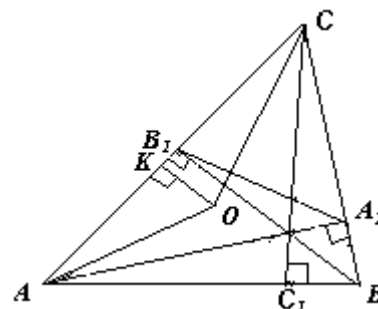
Значит,  $\angle KOC = \frac{1}{2} \angle AOC = \angle ABC$ . Следовательно,  $\angle OCA = 90^\circ - \angle KOC = 90^\circ - \angle ABC$ .

Понятно, что для других радиусов все аналогично.

**Следствия.** Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  – высоты треугольника (дополнить рис.). Тогда:

1)  $\angle OCA = \angle C_1CB$ ; 2) прямые  $CO$  и  $CC_1$  симметричны относительно биссектрисы угла  $ACB$ ; 3)  $OC \perp A_1B_1$ , то есть, радиусы описанной окружности перпендикулярны сторонам ортотреугольника; 4) касательные к описанной окружности треугольника параллельны сторонам его ортотреугольника.

**Доказательство.** 1)  $\angle C_1CB = 90^\circ - \angle ABC$ ; 2) разность равных углов; 3)  $\angle A_1B_1C + \angle KCO = \angle ABC + 90^\circ - \angle KOC = 90^\circ$ , значит,  $OC \perp A_1B_1$ ; 4) касательная, проведенная к описанной окружности в точке  $C$ , перпендикулярна радиусу  $OC$ , а  $OC \perp A_1B_1$ , значит, она параллельна  $A_1B_1$ .



### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Выведите аналогичный основной факт для случаев, когда угол  $B$  треугольника  $ABC$  – прямой или тупой. Верны ли следствия для этих случаев?
2. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $CL$ ,  $O$  – центр окружности, описанной около  $ABC$ . На стороне  $AC$  отмечена точка  $D$  так, что  $DC = BC$ . Докажите, что  $CO \perp DL$ .
3. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность, центр  $O$  которой лежит внутри него. Докажите, что если  $\angle BAO = \angle DAC$ , то диагонали четырехугольника перпендикулярны.
4. Биссектриса угла  $A$  равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) пересекает описанную окружность в точке  $W$ ,  $I$  – центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $IBW$  лежит на стороне  $BC$ .
5.  $H$  – ортоцентр остроугольного треугольника  $ABC$ ,  $O_A$  и  $O_C$  – центры окружностей, описанных около треугольников  $AHB$  и  $CHB$  соответственно. Докажите, что  $O_A O_C = AC$ .
6. Дан треугольник  $ABC$ . Рассматриваются все такие пары точек  $K$  и  $L$  на стороне  $AC$ , что  $\angle ABK = \angle CBL$ . Докажите, что центры описанных окружностей всех треугольников  $KBL$  лежат на одной прямой.
7. Произвольная прямая, проходящая через вершину  $B$  треугольника  $ABC$ , пересекает сторону  $AC$  в точке  $K$ , а описанную около  $ABC$  окружность – в точке  $M$ . Докажите, что: а) центры  $O_A$  описанных окружностей всех таких треугольников  $AMK$  лежат на одной прямой; б)  $O_A K \perp BC$ . в) Пусть  $O_C$  – центр окружности, описанной около треугольника  $CMK$ . Докажите, что прямые  $AO_A$  и  $CO_C$  пересекаются на высоте треугольника  $ABC$ .
8. Из середины  $D$  стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  опущены перпендикуляры  $DE$  и  $DF$  на стороны  $AB$  и  $AC$  соответственно.  $M$  – середина отрезка  $EF$ . Докажите, что  $DM \parallel AO$ , где  $O$  – центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .
9. Пусть  $I$ ,  $I_a$  и  $I_c$  – центры вписанной и двух внеписанных окружностей треугольника  $ABC$ ,  $O$  – центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $OI \perp AC$ .
10. Точка  $D$  вне остроугольного треугольника  $ABC$  такова, что  $\angle ABC + \angle ABD = \angle ACB + \angle ACD = 180^\circ$ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $ABC$  лежит на отрезке  $AD$ .