

### Дополнительные построения\_2

На этом занятии вам опять будут предложены задачи, для рационального и красивого решения которых надо найти дополнительные построения. На предыдущем занятии по этой теме в условиях задач, чаще всего, были заданы треугольники, поэтому при их решении использовались дополнительные построения, характерные для треугольников. На этом занятии в условиях задач чаще встречаются четырехугольники. В связи с этим, полезно вспомнить несколько «классических» задач, которые вы, возможно, уже рассматривали на школьных уроках или факультативах.

1) В параллелограмме  $ABCD$  точка  $M$  – середина стороны  $AD$ . В каком отношении отрезок  $BM$  делит диагональ  $AC$ ?

[1 : 2, считая от вершины  $A$ , два способа: теорема Фалеса или точка пересечения медиан].

2) Объясните построение трапеции: а) по четырем сторонам; б) по основаниям и диагоналям; в) по диагонали и радиусу вписанной окружности, если эта трапеция – равнобокая.

На этих примерах мы вспомнили основные факты и типовые дополнительные построения, которые вам пригодятся при решении некоторых задач. Для остальных задач дополнительные построения надо будет придумать.

### Задачи для самостоятельного решения

1. В трапеции  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны. На большем основании  $AD$  выбрана точка  $M$  так, что  $BM = MD = 3$  см. Найдите длину средней линии трапеции.
2. В трапеции с перпендикулярными диагоналями высота равна средней линии. Докажите, что трапеция равнобокая.
3. В невыпуклом четырехугольнике  $ABCD$  углы  $A$ ,  $B$  и  $D$  равны по  $45^\circ$ . Докажите, что середины его сторон являются вершинами квадрата.
4. Дан параллелограмм  $ABCD$ . На стороне  $AB$  отмечена точка  $M$  так, что  $DM = AD$ , а на стороне  $AD$  – точка  $N$  так, что  $BN = AB$ . Докажите, что  $CM = CN$ .
5. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$ . На продолжениях катетов  $AB$  и  $AC$  отложены равные отрезки  $BK$  и  $CL$ . Из точек  $A$  и  $B$  проведены перпендикуляры к  $KC$ , которые пересекли  $KL$  в точках  $F$  и  $E$  соответственно. Докажите, что  $EF = FL$ .
6. В треугольнике  $ABC$  на сторонах  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$  выбраны точки  $D$ ,  $E$  и  $F$  соответственно так, что  $BF = 2CF$ ,  $CE = 2AE$  и угол  $DEF$  – прямой. Докажите, что  $DE$  – биссектриса угла  $ADF$ .
7. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$ :  $AD = BC$ ,  $\angle ABD + \angle CDB = 180^\circ$ . Докажите, что  $\angle BAD = \angle BCD$ .
8. В четырехугольнике  $ABCD$ :  $\angle CAD + \angle BCA = 180^\circ$  и  $AB = BC + AD$ . Докажите, что  $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$ .
9. Внутри параллелограмма  $ABCD$  выбрана точка  $P$  так, что  $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$ . Докажите, что  $\angle PBC = \angle PDC$ .
10. Вписанная окружность прямоугольного треугольника  $ABC$  (угол  $C$  – прямой) касается сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  в точках  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  соответственно. Высоты треугольника  $A_1B_1C_1$  пересекаются в точке  $D$ . Найдите расстояние между точками  $C$  и  $D$ , если длины катетов треугольника  $ABC$  равны 3 и 4.