16.10.18

Вписанные углы и углы между касательной и хордой

В процессе решения задач мы уже сталкивались с углами, вписанными в окружность. Сегодня мы займемся ими вплотную. Вспомним (*сделав соответствующие рисунки*):

1) определения вписанного и центрального углов;
2) теорему о вписанном угле (два случая);
3) теорему об угле между касательной и хордой и теорему, ей обратную;
4) необходимые и достаточные условия того, чтобы 4 точки лежали на одной окружности (три эквивалентные формулировки).
5) что такое антипараллельность.

О дугах и плоских углах.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что если биссектрисы углов выпуклого четырёхугольника при пересечении образуют четырёхугольник, то он – вписанный.

2. Диагонали равнобокой трапеции $ABCD$ с боковой стороной AB пересекаются в точке P. Докажите, что центр O её описанной окружности лежит на описанной окружности треугольника APB.

3. Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Окружность, проходящая через точки A, O и B касается прямой BC. Докажите, что окружность, проходящая через точки B, O и C касается прямой CD.

4. К двум окружностям, пересекающимся в точках K и M, проведена общая касательная. Докажите, что если A и B – точки касания, то $\angle AMB + \angle AKB = 180°$.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$: $AB = BC = CD$, M – точка пересечения диагоналей, K – точка пересечения биссектрис углов A и D. Докажите, что точки A, M, K и D лежат на одной окружности.

6. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Точка M – середина BC. Докажите, что: а) касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC параллельна прямой B_1C_1; б) прямые MB_1 и MC_1 касаются описанной окружности треугольника AB_1C_1.

7. Две прямые, касающиеся данной окружности в точках A и B, пересекаются в точке C. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, лежит на данной окружности.

8. Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне AB взята точка K, на стороне CD – точка L, на отрезке KL – точка M. Докажите, что вторая (отличная от M) точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AKM и MLC, лежит на диагонали AC.

9. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны точки C_0, A_0 и B_0 соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников AB_0C_0, BC_0A_0 и CA_0B_0 проходят через одну и ту же точку.

10. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота из вершины A и биссектрисы из двух других вершин. Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного этими тремя прямыми, касается биссектрисы, проведенной из вершины A.

11. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямая CH пересекает полуокружность с диаметром AB, проходящую через точки A_1 и B_1, в точке D. Отрезки AD и BB_1 пересекаются в точке M, BD и AA_1 – в точке N. Докажите, что описанные окружности треугольников B_1DM и A_1DN касаются.