Вневписанная окружность_2

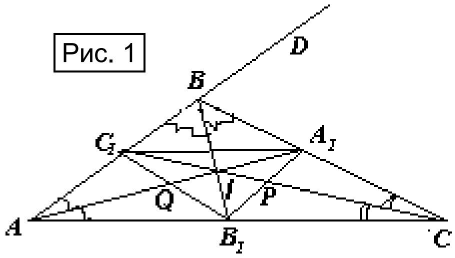
Использован материал из статьи А.Д. Блинков, Ю.А. Блинков. Вневписанная окружность. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №2/2009.

Напомним, что ***вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон***. На предыдущем занятии мы рассмотрели ее основные свойства и вы решили несколько задач. Задачи этого занятия отличаются тем, что в их условиях нет упоминания о вневписанных окружностях, но такие окружности выступают в качестве вспомогательной величины. Рассмотрим «классический» пример.

Пример 1. В треугольнике ABC с углом B, равным 120°, проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Найдите угол $A_1B_1C_1$.

Ответ: 90°.

Рис. 1



Решение. На продолжении стороны AB (за точку B) отметим точку D, тогда $\angle DBC = 60°$, то есть луч BC – биссектриса угла DBB_1 (см. рис. 1). Так как AA_1 – биссектриса угла BAC, то A_1 – центр окружности, касающейся BB_1, BD и B_1C. Такая окружность является вневписанной для треугольника ABB_1, поэтому, B_1A_1 – биссектриса угла BB_1C. Аналогично, C_1 – центр вневписанной окружности для треугольника CBB_1, поэтому, B_1C_1 – биссектриса угла BB_1A. Следовательно, $\angle A_1B_1C_1 = 90°$.

Отметим, что справедливо и обратное утверждение: если треугольник $A_1B_1C_1$ – прямоугольный с прямым углом B_1, то $\angle ABC = 120°$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

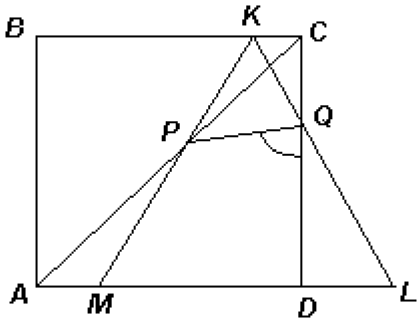
1. В условиях примера 1 докажите, что: а) $\angle B_1C_1C = \angle B_1A_1A = 30°$; б) точки A_1, C_1, Q и P лежат на одной окружности (Q и P – точки пересечения прямых AA_1 и CC_1 со сторонами треугольника $A_1B_1C_1$); в) точки B, A_1, P и I (а также точки B, C_1, Q и I) лежат на одной окружности (I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC).

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE. Оказалось, что DE – биссектриса треугольника ADC. Найдите угол BAC.

3. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна меньшему основанию BC, а диагональ AC .равна основанию AD. Прямая, проходящая через вершину B параллельно AC, пересекает прямую. DC в точке M. Докажите, что AM – биссектриса угла BAC.

4. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1. На стороне BC взята точка M, а на стороне CD – точка K так, что периметр треугольника MCK равен 2. Найдите: а) расстояние от вершины A до прямой MK; б) угол MAK.

5. Квадрат $ABCD$ и равносторонний треугольник MKL расположены так, как это показано на рисунке. Найдите угол PQD.



6. Точка E на стороне AD квадрата $ABCD$ такова, что $\angle AEB = 60°$. Биссектриса угла ABE, отразившись от стороны AD, пересекает отрезок BE в точке F. Докажите, что точка F лежит на диагонали квадрата.

7. На полосу наложили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, так, что его граница пересекает границы полосы в четырех точках. Докажите, что две прямые, проходящие крест-накрест через эти точки, пересекаются под углом 45°.

8. Углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны 15° и 30°. Какой угол образует с этой стороной проведенная к ней медиана?

9. Биссектрисы углов A и B выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а биссектрисы углов C и D пересекаются в точке Q (точки Q и P различны). Прямая PQ проходит через середину стороны AB. Чему может быть равен угол DAB, если $\angle ABC = \alpha$?