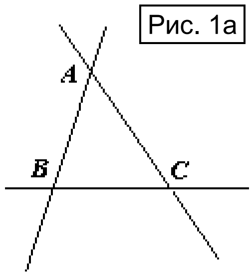
Вневписанная окружность_1

Использован материал из статьи А.Д. Блинков, Ю.А. Блинков. Вневписанная окружность. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №2/2009.

Пусть на плоскости заданы три прямые, которые попарно пересекаются в точках *A*, *B* и *C* (см. рис. 1а).

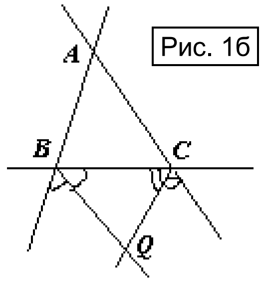
Рис. 1а



Сколько существует точек, равноудаленных от этих прямых?

Рассмотрим, например, биссектрисы внешних углов *B* и *C* треугольника *ABC* (см. рис. 1б). Так как сумма углов, образованных ими со стороной *BC*, меньше, чем 180°, то эти биссектрисы пересекутся в некоторой точке *Q*. Тогда точка *Q* равноудалена от прямых *AB*, *AC* и *BC*. Аналогично, рассматривая другие пары внешних углов треугольника *ABC*, получим еще две точки, обладающие требуемым свойством.

Рис. 1б



Таким образом, помимо центра окружности, вписанной в треугольник *ABC*, существуют, по крайней мере, ***еще три точки***, равноудаленные от заданных прямых. Каждая из этих точек является центром ***окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других сторон***. Такие ***окружности называют вневписанными*** для данного треугольника *ABC*.

Упражнения. **1)** Докажите, что других точек, равноудаленных от прямых *AB*, *AC* и *BC*, не существует (то есть их ровно четыре).

[Достаточно рассмотреть части плоскости, ограниченные углами, вертикальными углам треугольника. В них не может быть точек, равноудаленных от трех прямых]

2) Докажите, что точка *Q* лежит на биссектрисе угла *BAC* (см. рис. 1б).

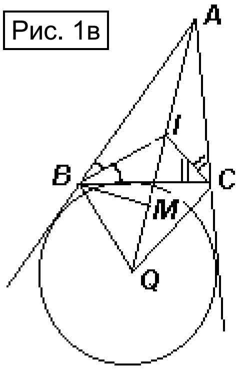
[Точка *Q* равноудалена от прямых *AB* и *AC*]

3) Пусть *I* – центр вписанной окружности. Вычислите углы *BIC* и *BQC*, если $\angle BAC = \alpha$.

[$\angle BIC = 90° + 0{,}5\alpha$; $\angle BQC = 90° - 0{,}5\alpha$]

Обратите внимание, что угол между биссектрисами внутренних углов – острый, а между биссектрисами внешних углов – тупой.

Рис. 1в



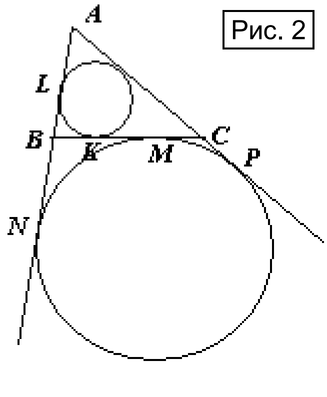
Почему сумма этих углов равна 180°?

[Углы *IBQ* и *ICQ* – прямые]

Отсюда следует, что точки *B* и *C* лежат на окружности с диаметром *IQ.* Где лежит центр этой окружности? Оказывается, он лежит на окружности, описанной около треугольника *ABC*. Этот факт называется ***теоремой Мансиона*** и является прямым следствием ***теоремы о «трезубце»*** или ***«трилистнике»***.

Действительно, пусть $\angle BAC = \alpha$; $\angle ABC = \beta$ *C* (см. рис. 1в). Угол *BIM* – внешний для треугольника *AIB*, значит, $\angle BIM = \angle IAB + \angle IBA = 0{,}5(\alpha + \beta)$. Кроме того, $\angle IBM = \angle IBC + \angle MBC = 0{,}5\alpha + 0{,}5\beta$, так как $\angle MBC = \angle MAC = 0{,}5\beta$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, описанной около треугольника *ABC*). Следовательно, $\angle BIM = \angle IBM$, то есть, *MI* = *MB*.

Рис. 2



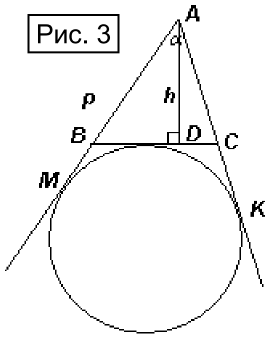
Аналогично получим, что *MI* = *MC*, значит, *M* – центр окружности, описанной около треугольника *BIC*, а точка *Q* лежит на этой окружности, то есть, точки *B*, *C*, *I* и *Q* лежат на окружности с центром *M*.

4) Пусть окружность касается стороны *BC* треугольника *ABC* в точке *M*, а продолжений сторон *AB* и *AC* – в точках *N* и *P* соответственно (см. рис.2). Вписанная в этот треугольник окружность касается стороны *BC* в точке *K*, а стороны *AB* – в точке *L*. Докажите, что:

а) *BK* = *p* – *b*, где *p* – полупериметр треугольника *ABC*, *b* – длина стороны *AC*; б) *AN* = *p*.

[Из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, получим: $AN = AL$, $BK = BL$ и $CN = CK$. Сумма этих шести отрезков составляет периметр треугольника ABC, поэтому, $AN + BK + CN = p$. Учитывая, что $AN + CN = b$, получаем равенство а). Применяя эту же теорему об отрезках касательных к другой окружности, получим: $AP = AT$, $BM = BP$ и $CM = CT$. Тогда $P_{ABC} = AB + AC + BC = AB + AC + BM + CM = AB + AC + BP + CT = AP + AT = 2AP$, откуда и следует утверждение б)]

Пример. Объясните, как построить треугольник по углу, высоте, проведенной из вершины этого угла, и периметру.



Решение. Пусть искомый треугольник ABC, в котором заданы $\angle BAC = \alpha$, высота $AD = h$ и $P_{\Delta ABC} = 2p$, построен. Проведем его вневписанную окружность, касающуюся продолжений сторон AC и AB в точках K и M соответственно, тогда $AK = AM = p$ (см. рис. 3). Кроме того, касательная BC к этой окружности находится на расстоянии h от точки A.

Отсюда вытекает следующее построение: 1) строим угол A величины α, на его сторонах откладываем отрезки $AK = AM = p$, после чего строим окружность, касающуюся сторон угла в этих точках; 2) строим окружность с центром A и радиусом h; 3) строим общую внутреннюю касательную к двум окружностям, которая пересечет стороны угла в искомых точках B и C.

Отметим, что, в зависимости от соотношения между заданными параметрами, задача либо имеет единственное решение (так как общие внутренние касательные к двум окружностям симметричны относительно биссектрисы угла BAC), либо не имеет решений.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1. Докажите, что:

а) отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой касания вневписанной окружности и противолежащей стороны, делит треугольник на два треугольника равного периметра;

б) точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны.

2. Объясните, как построить треугольник ABC, зная положение трех точек A_1, B_1 и C_1, являющихся центрами вневписанных окружностей треугольника ABC.

3. Докажите, что радиус одной из вневписанных окружностей равен полупериметру треугольника тогда и только тогда, когда этот треугольник – прямоугольный.

4. $ABCD$ – параллелограмм. Вневписанные окружности треугольников ABC и ACD касаются сторон BC и CD соответственно. Докажите, что точки их касания с прямой AC совпадают.

5. а) Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.

б) Отрезок, отличный от диагонали, разбивает квадрат на два многоугольника, в каждый из которых вписана окружность. Найдите длину отрезка, если радиусы окружностей равны R и r ($R > r$).

6. Даны угол и точка, лежащая между его сторонами. Объясните, как построить прямую, проходящую через данную точку так, чтобы она отсекала от данного угла треугольник с заданным периметром.

7. Дан треугольник ABC. На лучах AB и AC (вне треугольника) построены точки A_1 и A_2 соответственно так, что $BA_1 = CA_2 = BC$. A_0 – точка пересечения отрезков BA_2 и CA_1. Докажите, что прямая, проходящая через A_0 перпендикулярно прямой BC, содержит центр вневписанной окружности треугольника ABC.

8. Существует ли треугольник, у которого радиус одной из вневписанных окружностей равен радиусу описанной окружности?

9. Дан параллелограмм *ABCD*. Вневписанная окружность треугольника *ABD* касается продолжений сторон *AD* и *AB* в точках *M* и *N*. Докажите, что точки пересечения отрезка *MN* со сторонами *BC* и *CD* лежат на вписанной окружности треугольника *BCD*.

10. Объясните, как построить четырехугольник *ABCD* по двум сторонам *AB* и *AD* и двум углам *B* и *D*, если известно, что в него можно вписать окружность.