Задачи на построение

Что такое геометрическая задача на построение и что значит ее решить?

Задача на построение это задача, в которой требуется построить геометрический объект, пользуясь только двумя инструментами: циркулем и линейкой (односторонней и без делений).

Решение таких задач состоит не в том, чтобы проделать «руками» соответствующие построения и описать их, а в том, чтобы найти ***алгоритм решения***, то есть, описать решение задачи в виде последовательности ***уже известных стандартных построений***.

В этом смысле решение задач на построение хорошо иллюстрирует один из основных принципов решения любых математических задач: решить задачу это значит свести ее к какой-либо задаче, уже решенной ранее!

Какие построения циркулем и линейкой считать стандартными?

Это вопрос предварительной договоренности. Договоримся, к стандартным построениям отнести следующие:

1) построение прямой, проходящей через две заданные точки;
2) построение окружности с данным центром и данным радиусом;
3) построение отрезка, равного данному;
4) построение угла, равного данному;
5) построение середины отрезка (серединного перпендикуляра к отрезку);
6) построение биссектрисы угла;
7) построение перпендикуляра к прямой, проходящего через заданную точку (*два случая*).

На основе этих стандартных построений легко осуществляется ***построение треугольников по трем основным элементам***: 1) двум сторонам и углу; 2) стороне и двум углам; 3) трем сторонам. При этом очень важно понимать, что все ***линейные элементы*** в условиях задач заданы в виде ***отрезков*** (а не их длин), а все угловые – в виде ***углов*** (а не чисел, выражающих их величину)!

Далее, к тем же типовым построениям сводятся также построения равнобедренных и прямоугольных треугольников по их основным элементам, а также построение прямой, параллельной данной и проходящей через заданную точку (*как это сделать*?).

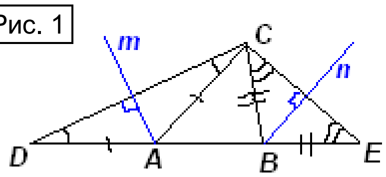
Таким образом, можно провести некоторую аналогию между решением задач на построение и строительством домов: стандартные построения – это «кирпичи», задачи на построение различных видов треугольников по их основным элементам – «блоки».

Теперь, пользуясь этими «блоками», можно приступить к решению задач, причем решенная задача становится готовой «панелью», которую можно целиком использовать при решении других задач. При этом, для того, чтобы научится решать задачи на построение (впрочем, как и другие геометрические задачи) очень важно осознавать, что решать их надо ***с конца***, то есть не пытаться строить все, что умеешь, наугад, а представить себе, что искомый объект уже построен и, исходя из этого, восстановить цепочку возможных построений в виде крупных «блоков» или «панелей».

На первых порах при решении задач мы выделим два основных метода: ***метод вспомогательного треугольника и метод геометрических мест точек***.

1) Суть метода вспомогательного треугольника – свести решаемую задачу к уже известной задаче на построение треугольника по основным элементам или к уже решенной задаче на построение треугольника по каким-то другим элементам.

Рис. 1



Пример 1. Объясните, как построить треугольник по двум его углам и периметру.

Решение. Пусть искомый треугольник *ABC* с данным периметром *P* и углами α и β при вершинах *A* и *B* соответственно – построен. «Развернем» его, то есть на прямой *AB* отложим отрезок *AD*, равный *AC*, и отрезок *BE*, равный *BC*. Полученные толчки *D* и *E* соединим с точкой *C* (см. рис. 1).

Заметим, что треугольник *ACD* – равнобедренный, угол *CAB* – внешний для этого треугольника, поэтому $\angle CDA = \angle DCA = \frac{\alpha}{2}$. Аналогично, $\angle CEB = \angle ECB = \frac{\beta}{2}$.

Таким образом, задача сводится к построению ***вспомогательного треугольника*** *CDE* по стороне и двум прилежащим к ней углам ($DE = P$, $\angle CDE = \frac{\alpha}{2}$, $\angle CED = \frac{\beta}{2}$). Для того, чтобы теперь получить вершины *A* и *B* искомого треугольника, достаточно, например, провести серединные перпендикуляры *m* и *n* к отрезкам *CD* и *CE* соответственно.

Отметим, что в подавляющем большинстве случаев, когда задана сумма (или разность) каких-либо отрезков, полезно сделать дополнительное построение, в результате которого заданный отрезок появляется на чертеже. Такой метод иногда называют «спрямлением» (и он применяется не только в задачах на построение).

2) Метод геометрических мест основан на том, что часть объектов, получаемых при стандартных построениях циркулем и линейкой, являются одновременно ГМТ, обладающих определенными свойствами. Например, окружность является геометрическим местом точек, удаленных от заданной точки на фиксированное расстояние; серединный перпендикуляр к отрезку – ГМТ, равноудаленных от концов отрезка; биссектриса угла – ГМТ, лежащих внутри угла и равноудаленных от его сторон и т. д. Помимо этого, некоторые ГМТ несложно построить, используя простейшие построения, метод вспомогательных треугольников и уже построенные ГМТ.

Суть метода ГМТ состоит в следующем: ***если некоторая точка X удовлетворяет двум условиям, то строятся ГМТ, удовлетворяющие каждому из этих условий, и тогда точка X принадлежит их пересечению***.

Приведите пример известного вам построения треугольника по основным элементам, решаемого методом ГМТ.

Пример 2. Объясните, как построить окружность, касающуюся данной прямой *m* и касающуюся данной окружности в данной точке *A* внешним образом.

Решение. Пусть даны прямая *m* и окружность с центром *O*, на которой отмечена точка *A*. Пусть искомая окружность построена, *P* – ее центр (см. рис. 2 а, б). Так как искомая окружность проходит через фиксированную точку *A*, то для построения этой окружности достаточно построить ее центр *P*. Так как окружности касаются в точке *A* внешним образом, то точки *O*, *A* и *P* лежат на одной прямой (*A* – между *O* и *P*).

Рис. 2а

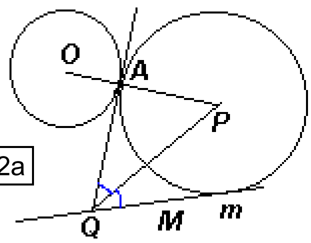
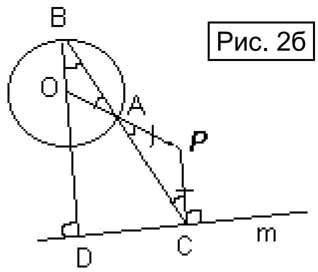


Рис. 2б



<u>Первый способ</u>. Если через точку *A* провести также общую касательную *AQ* к этим окружностям (*Q* – точка ее пересечения с данной прямой *m*), то луч *QP* будет являться биссектрисой угла *AQM* (см. рис. 2а).

Таким образом, решение задачи сводится к построению луча *OA*, касательной *QA* к данной окружности и биссектрисы *QP* угла *AQM*. *P* – точка пересечения лучей *OA* и *QP*.

<u>Второй способ</u>. Рассмотрим перпендикуляры *OD* и *ÐC*, опущенные из центров данной и искомой окружности на прямую *m* (см. рис. 2б). Пусть *B* – одна из точек пересечения *OD* и данной окружности, тогда, так как $BD \parallel PC$, то $\angle OAB = \angle DBC = \angle PCB = \angle PAC$, значит, углы *OAB* и *PAC* – вертикальные, то есть точка *A* лежит на прямой *BC*. Следовательно, искомая точка *P* лежит на перпендикуляре, проведенном к данной прямой из точки *C*, которая является пересечением прямых *m* и *AB*.

Отметим, что если касательная QA параллельна прямой m (первый способ решения) или, что равносильно, точка A лежит на отрезке BD (второй способ решения), то решением задачи является окружность с диаметром AD.

Отметим также, что решая задачу вторым способом и выбрав вместо точки *B* ей диаметрально противоположную, получим не внешнее, а внутреннее касание окружностей.

А как получить случай внутреннего касания при решении первым способом? [*Построить биссектрису угла, смежного с углом AQM*]

Задачи для самостоятельного решения

1. Объясните, как построить треугольник по следующим данным:
а) двум углам и высоте (*рассмотрите два случая*);
б) двум сторонам и медиане (*рассмотрите два случая*);
в) трем медианам;
г) стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон;
д) стороне, противолежащему углу и радиусу вписанной окружности;

2. Объясните, как построить прямоугольный треугольник по следующим данным:
а) гипотенузе и высоте, проведенной к гипотенузе;
б) острому углу и разности гипотенузы и катета.

3. Объясните, как построить окружность, которая касается данной прямой m в данной точке B и проходит через данную точку A, не лежащую на прямой m.

4. Даны три точки A, B и C. Объясните, как построить три окружности, попарно касающиеся в этих точках.

5. Даны окружность и прямая m, ее не пересекающая. Объясните, как построить окружность, которая касается данной окружности и данной прямой в заданной точке Q, принадлежащей этой прямой.

6*. Объясните, как построить треугольник по высоте, биссектрисе и медиане, которые проведены из одной вершины.