21.05.19

Точка Монжа и сфера двенадцати точек

1. Сегодня опять речь пойдет о стереометрии, но вначале я напомню одну планиметрическую задачу, которая встречалась, причем последний раз недавно.

1) Докажите, что прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противолежащим сторонам, пересекаются в одной точке.

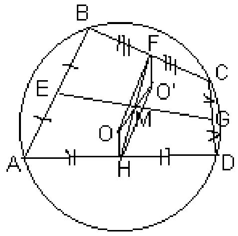

Рис. 1

Решение. Пусть *ABCD* – четырехугольник, вписанный в окружность с центром *O*; *E*, *F*, *G* и *H* – середины его сторон (см. рис. 1). Так как *EFGH* – параллелограмм, то точка *M* пересечения его диагоналей *EG* и *FH* является серединой каждой из них.

Пусть $O' = S_M(O)$, тогда $F = S_M(H)$, то есть, *O'FOH* – параллелограмм. Так как $OH \perp AD$. то $O'F \perp AD$. Рассмотрев аналогично перпендикуляры *OG*, *OF* и *OE* к остальным сторонам *ABCD* и их образы при симметрии относительно точки *M*, получим, что они также проходят через точку *O'*, что и требовалось доказать.

Отметим, что точка M – центроид четырехугольника ABCD, а точка $O' \equiv H$ *(ортоцентром вписанного четырехугольника ABCD). Напомню, что в занятии «Замечательные точки и линии четырехугольника» точка H была определена как пересечение отрезков* AH_a, BH_b, CH_c и DH_d, *где* H_a, H_b, H_c *и* H_d *– ортоцентры треугольников BCD, ACD, ABD и ABC соответственно, и было отдельно доказано, что центроид является серединой отрезка, соединяющего O и H. Это утверждение называют теорема Монжа.*

2) Рассмотрим стереометрический аналог этой задачи, которую также называют ***теоремой Монжа***.

Докажите, что шесть плоскостей, проведенных через середины ребер тетраэдра перпендикулярно противолежащим ребрам пересекаются в одной точке.

Решение. Рассмотрим центр *O* сферы, описанной около тетраэдра *DABC*, и его центроид *M*. Плоскости, проходящие через середину ребра и перпендикулярные этому ребру, пересекаются в точке *O*. Так как *M* – делит каждую бимедиану тетраэдра пополам, то плоскости, о которых говорится в условии задачи, им симметричны относительно точки *M*, поэтому они пересекаются в точке $N = S_M(O)$, что и требовалось.

Полученную точку N называют точкой Монжа данного тетраэдра.

2. В задаче 7 прошлого занятия была определена ***сфера двенадцати точек ортоцентрического тетраэдра***. В произвольном тетраэдре можно рассмотреть аналогичную сферу, которая получается из описанной сферы гомотетией с центром *M* и коэффициентом $k = -\frac{1}{3}$. Очевидно, что она описана около тетраэдра, вершинами которого являются центроиды граней. Такую сферу также принято называть ***сферой двенадцати точек*** тетраэдра, хотя в произвольном тетраэдре еще восемь точек не обладают какими-либо особенностями. Ее центр O_1 | $\overline{MO_1} = -\frac{1}{3}\overline{MO}$ (то есть точка *M* делит отрезок OO_1 в отношении 3 : 1, считая от точки *O*), радиус $R_1 = \frac{R}{3}$, где *R* – радиус описанной сферы.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

Во всех задачах рассматривается тетраэдр DABC, O – центр его описанной сферы, M – центроид, N – точка Монжа.

1. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре точка Монжа совпадает с ортоцентром тетраэдра.

2. Докажите, что: а) сфера двенадцати точек тетраэдра является образом описанной около него сферы при гомотетии с центром N и $k = \frac{1}{3}$;

б) центр сферы двенадцати точек лежит на отрезке ON и делит его в отношении 2 : 1, считая от очки O.

3. В тетраэдре точка D_1 лежит на отрезке ND и $\frac{ND_1}{D_1D} = \frac{1}{2}$; M' – центроид грани ABC. Докажите, что: а) D_1M' – диаметр сферы двенадцати точек этого тетраэдра;
б) ортогональная проекция точки D_1 на плоскость ABC лежит на этой сфере.
4. а) Пусть сфера, описанная около тетраэдра, вторично пересекает прямую DH, содержащую высоту тетраэдра, в точке P. Докажите, что расстояние от центра O_1 сферы двенадцати точек до плоскости ABC в шесть раз меньше, чем длина DP.
б) Докажите, что высота тетраэдра, проведенная из вершины D, касается описанной около него сферы тогда и только тогда, когда центр сферы двенадцати точек лежит в плоскости ABC.
5. Докажите, что точка N лежит в плоскости ABC тогда и только тогда, когда основание Q высоты DQ лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.
6. Точка N лежит в плоскости ABC. Докажите, что высоты граней DAB, DBC и DCA, проведенные из точки D, лежат в одной плоскости.