

### Ортоцентрический тетраэдр

**Определение.** *Тетраэдр называется ортоцентрическим, если каждая его вершина проектируется в ортоцентр противоположной грани.*

Почему такой тетраэдр существует? [Например, **правильный** или **прямоугольный** тетраэдры являются ортоцентрическими]

#### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда:
  - а) противоположные ребра попарно перпендикулярны (достаточно двух пар!);
  - б) равны его бимедианы;
  - в) грани описанного параллелепипеда являются ромбами;
  - г) прямые, содержащие его высоты, пересекаются в одной точке;
  - д) перпендикуляры к граням, восстановленные из их центроидов, пересекаются в одной точке;
  - е) равны углы между противоположными ребрами;
  - ж) равны суммы квадратов длин противоположных ребер;
  - з) середины всех ребер тетраэдра лежат на одной сфере.
2. Обязательно ли ортоцентрический тетраэдр является правильным, если:
  - а) он является равногранным;
  - б) его ортоцентр совпадает с центроидом;
  - в) его ортоцентр совпадает с центром описанной сферы;
  - г) его ортоцентр совпадает с центром вписанной сферы;
  - д) он является каркасным?
3. Длины скрещивающихся ребер ортоцентрического тетраэдра равны  $a$  и  $b$ . Найдите длину его бимедианы.
4. Дан ортоцентрический тетраэдр  $ABCD$ .
  - а) Через каждое ребро с вершиной  $D$  проведена плоскость, параллельная противоположному ребру. Докажите, что эти плоскости вместе с плоскостью  $ABC$  ограничивают пирамиду с равными боковыми ребрами.
  - б) Пусть  $K$ ,  $L$  и  $M$  – основания высот треугольника  $ABC$ . Докажите, что боковые грани пирамиды  $DKLM$  одинаково наклонены к плоскости основания.
5. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре:
  - а) общие перпендикуляры к скрещивающимся ребрам пересекаются в одной точке;
  - б) попарные произведения косинусов двугранных углов при скрещивающихся ребрах равны.
6. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре:
  - а) все плоские углы при одной и той же вершине имеют один и тот же вид (либо острые, либо прямые, либо тупые);
  - б) хотя бы одна из граней – остроугольный треугольник.