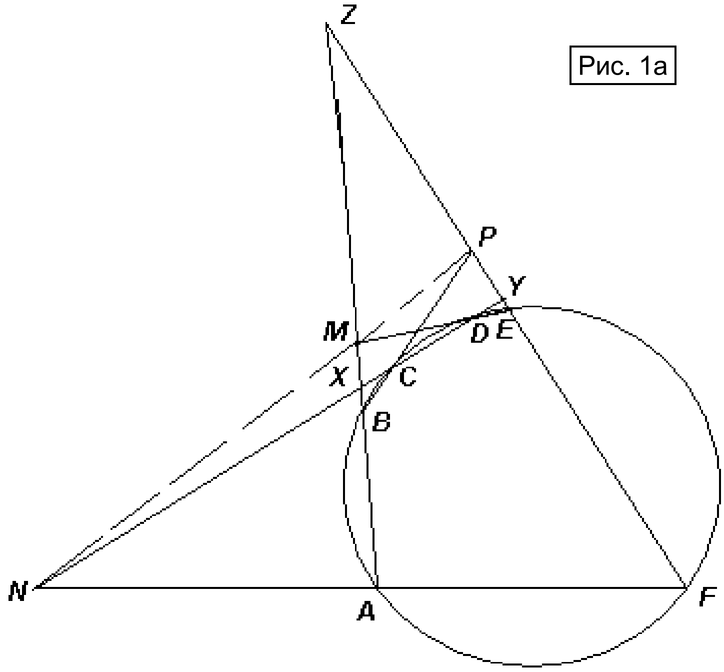
# Теорема Паскаля

На занятиях по темам «Выход в пространство» и «Полярное соответствие» мы уже говорили об элементах проективной геометрии. Одну из теорем, находящуюся на стыке евклидовой и проективной геометрии, а именно, теорему Дезарга мы уже рассматривали. Сегодня – еще одна такая теорема, которая называется ***теоремой Паскаля***.

***Теорема***. ***Три точки попарного пересечения противолежащих сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой***.

**Доказательство**. Первый способ. Пусть шестиугольник *ABCDEF* вписан в окружность, *M* = (*AB*) ⋂ (*DE*), *P* = (*BC*) ⋂ (*EF*), *N* = (*CD*) ⋂ (*FA*) (см. рис. 1а). Докажем, что точки *M*, *P* и *N* лежат на одной прямой.




Рассмотрим точки попарного пересечения сторон, взятых через одну: *X* = (*AB*) ⋂ (*CD*), *Y* = (*CD*) ⋂ (*EF*), *Z* = (*EF*) ⋂ (*AB*). По теореме о степени точки получим три равенства, которые удобно записать в векторной форме: $\overline{XA}\cdot\overline{XB}=\overline{XC}\cdot\overline{XD}$; $\overline{YC}\cdot\overline{YD}=\overline{YE}\cdot\overline{YF}$ и $\overline{ZA}\cdot\overline{ZB}=\overline{ZE}\cdot\overline{ZF}$ (1).

Рассмотрим треугольник *XYZ* и три прямые, пересекающие его стороны: (*BC*), (*DE*) и (*FA*). Применяя в каждом случае теорему Менелая, соответственно получим: $\frac{\overline{XB}}{\overline{BZ}}\cdot\frac{\overline{ZP}}{\overline{PY}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{CX}}=-1$; $\frac{\overline{XM}}{\overline{MZ}}\cdot\frac{\overline{ZE}}{\overline{EY}}\cdot\frac{\overline{YD}}{\overline{DX}}=-1$ и $\frac{\overline{XA}}{\overline{AZ}}\cdot\frac{\overline{ZF}}{\overline{FY}}\cdot\frac{\overline{YN}}{\overline{NX}}=-1$. Перемножим почленно эти равенства и произведем сокращения, учитывая равенства (1): $\frac{\overline{XM}}{\overline{MZ}}\cdot\frac{\overline{ZP}}{\overline{PY}}\cdot\frac{\overline{YN}}{\overline{NX}}=-1$. Следовательно, точки *M*, *P* и *N* лежат на одной прямой (***коллинеарны***).

***Эта прямая называется прямой Паскаля для данного вписанного шестиугольника***.

Так как теорема Паскаля по своей сути является проективной, то можно сразу предсказать, что произойдет, если в данном шестиугольнике: а) две стороны параллельны; б) две пары сторон параллельны.

Пусть, например, (*AB*) || (*DE*), то есть *M* – бесконечно удаленная точка, тогда (*NP*), проходящая через *M*, будет параллельна этим сторонам. *Самостоятельно сделать чертеж*.

Если же (*AB*) || (*DE*) и (*BC*) || (*EF*), то *M* и *P* – бесконечно удаленные точки, поэтому, (*MP*) – бесконечно удаленная прямая, а точка *N* ей принадлежит. Это означает, что (*CD*) || (*FA*).

Отметим, что утверждение теоремы Паскаля останется верным, если точки *A*, *B*, *C*, *D*, *E* и *F* расположены на окружности произвольным образом, то есть если *ABCDEFA* – произвольная замкнутая ломаная (возможно с самопересечениями). Это дает возможность рассмотреть другой способ доказательства теоремы Паскаля.

Второй способ. Пусть шестиугольник *ABCDEF* вписан в окружность, *X* = (*AB*) ⋂ (*DE*), *Y* = (*BC*) ⋂ (*EF*), *Z* = (*CD*) ⋂ (*FA*) (см. рис..1б) Докажем, что точки *X*, *Z* и *Y* лежат на одной прямой.

Треугольники $AZD$ и $CZF$ подобны. Кроме того, $\angle XAZ = \angle YCF$ и $\angle XDZ = \angle YFC$. Рассмотрим преобразование подобия, переводящее треугольник $AZD$ в треугольник $CZF$. Образом точки $X$ будет такая точка $X'$, что $\angle X'CZ = \angle XAZ = \angle YCF$ и $\angle X'FZ = \angle XDZ = \angle YFC$. Следовательно, точка $X'$ изогонально сопряжена точке $Y$ относительно треугольника $CZF$. Тогда $\angle FZY = \angle CZX' = \angle AZX$, то есть точки $X$, $Z$ и $Y$ лежат на одной прямой.

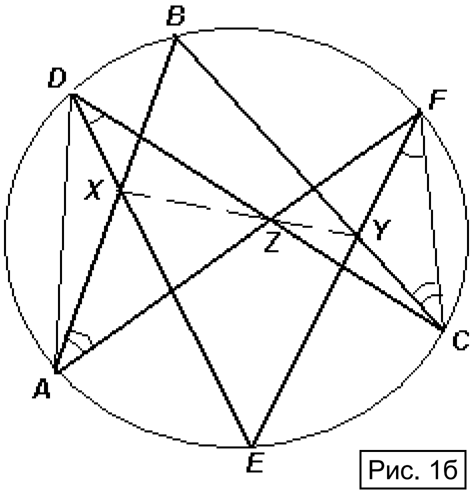


Рис. 1б

Более того, теорема Паскаля в этом общем случае верна не только для точек, лежащих на окружности, но и для шести точек, принадлежащих любому коническому сечению!

Отметим также, что если на таком чертеже обозначить точки так, чтобы вписанный шестиугольник $ABCDEF$ был выпуклым, то получим следствие: три точки попарного пересечения его диагоналей лежат на одной прямой (см. рис. 1в).

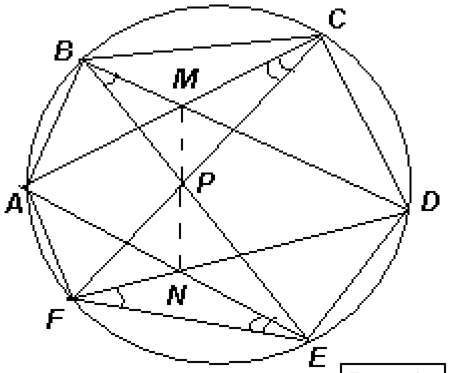


Рис. 1в

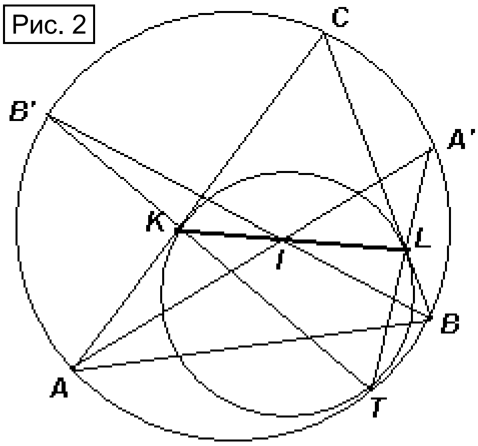
Отметим также, что справедлива и теорема, обратная теореме Паскаля, которая уже целиком относится к проективной геометрии: ***если три пары противолежащих сторон шестиугольника пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, то вершины шестиугольника принадлежат некоторому коническому сечению***.

В качестве примера применения теоремы Паскаля рассмотрим ее неожиданную связь с ***леммой о сегменте*** и одним из свойств ***полувписанной окружности***.

**Пример**. Полувписанная окружность треугольника $ABC$ касается сторон $AC$ и $BC$ в точках $K$ и $L$, а описанной окружности – в точке $T$. Докажите, что центр вписанной окружности $I$ – середина отрезка $KL$.

*Этот факт был доказан ранее, но с помощью теоремы Паскаля доказательство станет гораздо проще*.

Рис. 2




**Решение**. См. рис. 2. По лемме о сегменте, прямые $TL$ и $TK$ вторично пересекают окружность в точках $A'$ и $B'$ – серединах дуг $BC$ и $AC$. Значит, $AA'$ и $BB'$ – биссектрисы треугольника, поэтому они пересекаются в точке $I$. По теореме Паскаля для ломаной $CAA'TB'B$ получим, что точки $K$, $I$ и $L$ лежат на одной прямой. Так как треугольник $KCL$ – равнобедренный, то его биссектриса $CI$ является также и медианой, что и требовалось.

### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

**1.** Не используя проективной формулировки теоремы Паскаля, докажите, что если две пары противолежащих сторон вписанного шестиугольника параллельны, то и третья пара сторон также параллельна.

**2.** Даны пять точек некоторой окружности. С помощью одной линейки постройте еще одну точку этой окружности.

**3.** В окружность с центром $O$ вписан четырехугольник $ABCD$.

а) Через произвольную точку $X$ проведены прямые $AX$ и $DX$, пересекающие прямые $CD$ и $AB$ в точках $E$ и $F$ соответственно и вторично пересекающие окружность в точках $M$ и $N$

соответственно. Докажите, что прямые $EF$, $MN$ и $BC$ пересекаются в одной точке или параллельны.

б) Точка $X$ такова, что $\angle BAX = \angle CDX = 90°$. Докажите, что точка $P$ пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ лежит на прямой $XO$.

**4.** Пусть $O$ и $I$ – центры описанной и вписанной окружностей прямоугольного треугольника, $R$ и $r$ – радиусы этих окружностей, $J$ – точка, симметричная вершине прямого угла относительно $I$. Найдите $OJ$.

**5.** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ отмечена точка $D$. Полувписанные окружности треугольников $ACD$ и $BCD$, касающиеся сторон $AD$ и $BD$ соответственно, касаются стороны $CD$ в одной и той же точке $X$. Докажите, что центр $I$ вписанной окружности треугольника $ABC$ лежит на перпендикуляре, опущенном из точки $X$ на $AB$.

**6.** Хорда $CD$ окружности с центром $O$ перпендикулярна ее диаметру $AB$, а хорда $AE$ делит пополам радиус $OC$. Докажите, что хорда $DE$ делит пополам хорду $BC$.

**7.** Даны треугольник $ABC$ и некоторая точка $T$. Пусть $P$ и $Q$ – основания перпендикуляров, опущенных из точки $T$ на прямые $AB$ и $AC$ соответственно, а $R$ и $S$ – основания перпендикуляров, опущенных из точки $A$ на прямые $TC$ и $TB$ соответственно. Докажите, что точка $X$ пересечения прямых $PR$ и $QS$ лежит на прямой $BC$.

**8.** Точки $A$ и $A_1$, лежащие внутри окружности с центром $O$, симметричны относительно точки $O$. Точки $P$, $P_1$, $Q$ и $Q_1$ лежат на окружности, причем сонаправлены лучи $AP$ и $A_1P_1$ и лучи $AQ$ и $A_1Q_1$. Докажите, что точка пересечения прямых $P_1Q$ и $PQ_1$ лежит на прямой $AA_1$.

**9.** Точка $M$ лежит на окружности, описанной около треугольника $ABC$, $P$ – произвольная точка. Прямые $AP$, $BP$ и $CP$ пересекают окружность в точках $A'$, $B'$ и $C'$ соответственно. Докажите, что точки пересечения прямых $MA'$ и $BC$, $MB'$ и $CA$, $MC'$ и $AB$ лежат на одной прямой, проходящей через точку $P$.

**10.** В треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$ и $BB_1$ и биссектрисы $AA_2$ и $BB_2$; а его вписанная окружность касается сторон $BC$ и $AC$ в точках $A_3$ и $B_3$ соответственно. Докажите, что прямые $A_1B_1$, $A_2B_2$ и $A_3B_3$ пересекаются в одной точке или параллельны.