

Полярное соответствие

Пусть на плоскости зафиксирована окружность ω с центром O радиуса R . Напомню, что **точки A и A' (отличные от O) называются симметричными относительно ω , если A' лежит на луче OA и $OA \cdot OA' = R^2$** (см. рис. 1). Эти точки являются **инверсными**.

Введем новое понятие.

Определения. 1) Для каждой точки A плоскости, отличной от O , через точку A' , симметричную ей относительно ω , проведем прямую a , перпендикулярную OA' . Тогда прямая a называется **полярной** точки A , а точка A – **полюсом** прямой a (см. рис. 1 – дополнить).

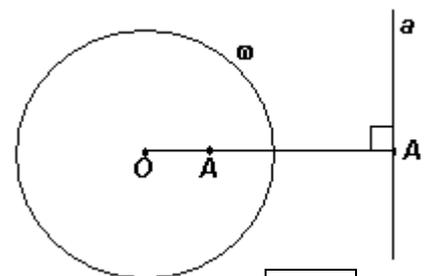


Рис. 1

2) Соответствие $\{A\} \leftrightarrow \{a\}$ является взаимно-однозначным соответствием между точками, не совпадающими с O , и прямыми, не проходящими через O , и оно называется **полярным соответствием**.

Условимся обозначать точки, не совпадающие с O (полюсы), большими латинскими буквами, а прямые, не проходящие через O (поляры), соответствующими маленькими буквами. Само полярное соответствие будем обозначать знаком « \leftrightarrow ».

Если считать, что точке O соответствует бесконечно удаленная прямая, а прямым, проходящим через O , соответствуют бесконечно удаленные точки, то можно рассматривать полярное соответствие на **проективной плоскости**.

Это обычная плоскость, дополненная бесконечно удаленными точками, которые можно считать точками пересечения параллельных прямых. Все бесконечно удаленные точки лежат на бесконечно удаленной прямой.

Из определения понятно, что для доказательства **простейших свойств полярного соответствия** нам потребуется вспомнить некоторые свойства **инверсии**.

1) Построение образа точки A , лежащей вне окружности инверсии.

2) Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.

Простейшие свойства полярного соответствия

1. а) Пусть точка A расположена вне окружности ω . Проведем из A касательные AM и AN . Тогда MN – полярная точка A .

Следует из основного способа построения точки A' для этого случая.

б) Если $A \in \omega$, то a – касательная к ω , проведенная в точке A .

Следует из того, что $A' \equiv A$.

в) Один из углов между полярами точек A и B равен углу AOB .

Угол между прямыми, соответственно перпендикулярными двум данным.

г) Полярная a точки A относительно ω является радикальной осью двух окружностей: ω и окружности α с диаметром OA .

Следует из 1 а, б и свойства 2) инверсии: геометрическое место образов точек прямой a при инверсии относительно ω есть окружность с диаметром OA (см. рис. 2).

д) Полярной точки A относительно окружности $(O; R)$ является множество таких точек X , что $\overline{OA} \cdot \overline{OX} = R^2$.

Следует из 1г и свойства 2 инверсии (см. рис. 2). Кроме того, $\overline{OA} \cdot \overline{OX} = OA \cdot OX \cdot \cos \angle XO A = OA \cdot OA' = R^2$.

Этот факт иногда используется в качестве определения полярной.

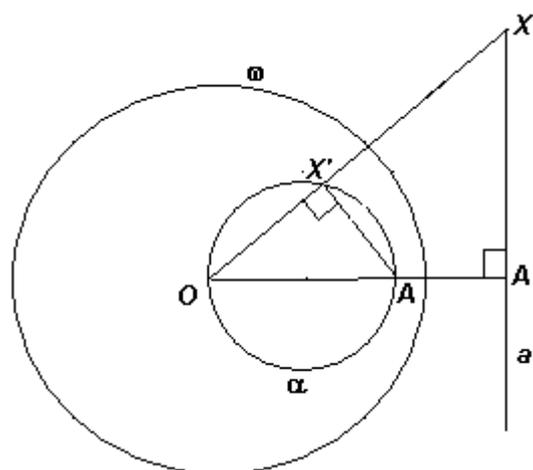


Рис. 2

2. (Двойственность) а) $A \in b \Leftrightarrow B \in a$.

Следует из 1д.

б) Пусть O , A и B не лежат на одной прямой, тогда $C = a \cap b \Leftrightarrow AB$.

Следует из 2а (поляра точки C проходит через точки A и B , поэтому совпадает с AB).

в) Точки A , B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда a , b и c проходят через одну точку или параллельны.

1) Параллельность $\Leftrightarrow O$ лежит на той же прямой. 2) (Следует из 2а) $a \cap b \Leftrightarrow AB$, $a \cap c \Leftrightarrow AC$. Тогда $AB \equiv AC \Leftrightarrow a \cap b \equiv a \cap c$.

На занятии «Симедиана_2» мы встретились с понятием **гармонического четырехугольника**. Напомню, что четырехугольник $ABCD$ называется гармоническим, если $AB \cdot CD = BC \cdot AD$. Это понятие можно обобщить для любого расположения точек A , B , C и D . В частности, если они лежат на одной прямой, то их называют **гармонической четверкой точек**. Один из примеров такой четверки – две вершины треугольника и основания внутренней и внешней биссектрис, проведенных к стороне с концами в этих вершинах (изобразить).

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Даны окружность ω и прямая l , не имеющие общих точек. Из каждой точки P , лежащей на прямой l , проводятся касательные PA и PB к окружности ω . Докажите, что все хорды AB имеют общую точку.

2. (**Гармоническая четверка**) а) Точки A , B , C и D лежат на одной прямой и образуют гармоническую четверку ($AB \cdot CD = BC \cdot AD$). Докажите, что точка D лежит на поляре точки B относительно любой окружности, проходящей через A и C .

3. (**Основное свойство полярного соответствия**) Через точку A , лежащую вне окружности ω , проведены к ней две секущие m и l , которые пересекают ω в точках M_1 , M_2 и L_1 , L_2 соответственно. Докажите, что прямые M_1L_1 и M_2L_2 пересекаются на поляре точки A или параллельны ей.

4. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке T , а продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках P и Q . Докажите, что:

а) точки P и Q лежат на поляре точки T .

б) четверка точек P , Q , T и O (центр окружности) – ортоцентрическая (любая из этих точек является ортоцентром треугольника с вершинами в трех других точках).

5. Объясните, каким образом, используя только линейку без делений, построить:

а) поляру точки, не лежащей на данной окружности ω ;

б) касательную к данной окружности ω , проходящую через заданную точку M ,

в) перпендикуляр из данной точки P , лежащей на полуокружности с данным диаметром AB , к этому диаметру.

6. а) (**Симметричная бабочка**) Дана точка A на диаметре BC полуокружности ω . Точки X и Y , лежащие на ω , таковы, что $\angle XAB = \angle YAC$. Докажите, что все прямые XY проходят через одну и ту же точку, либо параллельны.

б) Объясните, каким образом из утверждения задачи 6а можно получить решение **основной задачи о симедиане**: «Касательные к описанной окружности треугольника ABC , проведенные через точки B и C , пересекаются в точке P . Тогда AP – симедиана треугольника ABC ».

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω . Известно, что касательные к ω , проведенные в точках A и C , пересекаются на прямой BD или параллельны BD . Докажите, что: а) касательные к ω , проведенные в точках B и D , пересекаются на прямой AC или параллельны AC .

б) условие пункта а) равносильно тому, что $ABCD$ – гармонический четырехугольник.

8. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω . K , L , M и N – точки касания ω со сторонами AB , BC , CD и DA соответственно. Продолжения сторон AB и CD пересекаются

в точке R , продолжения сторон BC и DA – в точке Q , продолжения KL и MN – в точке S , продолжения LM и NK – в точке T . Докажите, что: а) точки Q , R , S и T лежат на одной прямой; б) прямые AC , BD , KM и LN пересекаются в одной точке.

9. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром O . Его диагонали пересекаются в точке T , а лучи AB и DC – в точке P . Описанные окружности треугольников PAD и PBC вторично пересекаются в точке M . Докажите, что точки O , T и M лежат на одной прямой.

10. Пусть AL и AK – внутренняя и внешняя биссектрисы треугольника ABC , P – точка пересечения касательных к описанной окружности в точках B и C . Перпендикуляр, восстановленный из точки L к BC , пересекает прямую AP в точке Q . Докажите, что Q лежит на средней линии треугольника LKP .