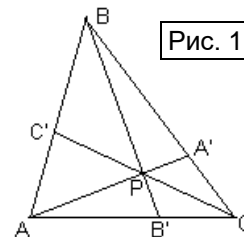


Изогональное сопряжение. Точка Лемуана

На этом занятии мы продолжим заниматься изогональным сопряжением. Мы рассмотрим другой подход к этому понятию и уточним связь между изогональным сопряжением и симедианами.

1. Вспомним **теорему Чевы**: три чевианы AA' , BB' и CC' треугольника ABC пересекаются в одной точке T и т. т., когда $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1$ (см. рис. 1).



2. Докажем следствие из нее, которое обычно называют **теоремой Чевы в форме синусов**: три чевианы AA' , BB' и CC' треугольника ABC пересекаются в одной точке T и т. т., когда $\frac{\sin \angle ABB'}{\sin \angle B'BC} \cdot \frac{\sin \angle CAA'}{\sin \angle A'AB} \cdot \frac{\sin \angle BCC'}{\sin \angle C'CA} = 1$.

Доказательство. Достаточно показать, что для любых точек A' , B' и C' , лежащих на сторонах BC , CA и AB треугольника ABC , выполняется равенство: $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} =$

$$\frac{\sin \angle ABB'}{\sin \angle B'BC} \cdot \frac{\sin \angle CAA'}{\sin \angle A'AB} \cdot \frac{\sin \angle BCC'}{\sin \angle C'CA}.$$

Действительно, пусть $\angle A'BV = \varphi$, тогда $\angle NB'V = 180^\circ - \varphi$ (дополнить рис. 1). По теореме синусов из треугольников ABB' и CBV' получим: $\frac{AB'}{\sin \angle ABB'} = \frac{AB}{\sin \varphi}$ и

$$\frac{B'C}{\sin \angle B'BC} = \frac{BC}{\sin(180^\circ - \varphi)}. \text{ Следовательно, } \frac{AB'}{B'C} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{\sin \angle ABB'}{\sin \angle B'BC}. \text{ Запишем еще два}$$

аналогичных соотношения для $\frac{CA'}{A'B}$ и $\frac{BC'}{C'A}$ (самостоятельно). Перемножив полученные равенства почленно, получим требуемое.

3. Докажем, что **если чевианы AA' , BB' и CC' треугольника ABC пересекаются в одной точке, то чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 , симметричные им относительно биссектрис углов A , B и C соответственно, также пересекаются в одной точке.**

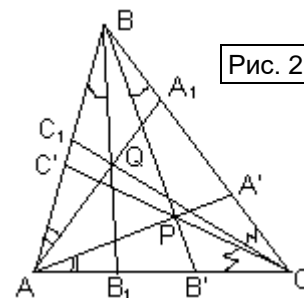
Запишем условие, используя теорему Чевы в форме синусов:

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = \frac{\sin \angle ABB'}{\sin \angle B'BC} \cdot \frac{\sin \angle CAA'}{\sin \angle A'AB} \cdot \frac{\sin \angle BCC'}{\sin \angle C'CA} = 1. \text{ Используя}$$

равенство углов, которое следует из симметрии (см. рис. 2),

$$\text{получим: } \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{\sin \angle ABB_1}{\sin \angle B_1BC} \cdot \frac{\sin \angle CAA_1}{\sin \angle A_1AB} \cdot \frac{\sin \angle BCC_1}{\sin \angle C_1CA} =$$

$$\frac{\sin \angle CBB'}{\sin \angle B'BA} \cdot \frac{\sin \angle BAA'}{\sin \angle A'AC} \cdot \frac{\sin \angle ACC'}{\sin \angle C'CB} = 1: \left(\frac{\sin \angle ABB'}{\sin \angle B'BC} \cdot \frac{\sin \angle CAA'}{\sin \angle A'AB} \cdot \frac{\sin \angle BCC'}{\sin \angle C'CA} \right) =$$



1. Тогда требуемое утверждение следует из теоремы Чевы.

Это еще один способ ввести понятие **изогонально сопряженных точек относительно треугольника ABC**.

4. Пусть AA' , BB' и CC' – медианы треугольника ABC , тогда AA_1 , BB_1 и CC_1 – симедианы. Из доказанного утверждения пункта 3 следует, что **симедианы треугольника также пересекаются в одной точке** (см. рис. 2). **Точка Q пересечения симедиан называется точкой Лемуана.**

Тем самым установлена связь между изогональным сопряжением и симедианами.

5. Пусть задан треугольник ABC . Тогда **отображение всех точек плоскости, кроме его вершин, при котором каждой точке соответствует ей изогонально сопряженная, называется изогональным сопряжением плоскости относительно треугольника ABC**.

Некоторые свойства этого отображения – в процессе решения задач.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1. Докажите свойства изогонального сопряжения относительно данного треугольника:
а) оно имеет четыре неподвижные точки; б) образом любой точки прямой, содержащей сторону треугольника, кроме его вершин, является противоположная вершина; в) у точек, лежащих на описанной окружности треугольника, нет изогонально сопряженных.
2. Докажите, что в прямоугольном треугольнике точка Лемуана совпадает с серединой высоты, проведенной к гипотенузе.
3. Через точку X , лежащую внутри треугольника, проведены три отрезка, антипараллельных сторонам треугольника. Докажите, что эти отрезки равны тогда и только тогда, когда X – точка Лемуана этого треугольника.
4. Прямые, содержащие медианы треугольника ABC , вторично пересекают его описанную окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 . Прямые, проходящие через A , B и C и соответственно параллельные противоположным сторонам, пересекают ее же в точках A_2 , B_2 и C_2 . Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.
5. К двум окружностям ω_1 и ω_2 , пересекающимся в точках A и B , проведена их общая касательная CD (C и D – точки касания соответственно, точка B ближе к прямой CD , чем A). Прямая, проходящая через A , вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках K и L соответственно (A лежит между K и L). Прямые KC и LD пересекаются в точке P . Докажите, что PB – симедиана треугольника KPL .
6. Пусть A_1 , B_1 и C_1 – проекции точки Лемуана L треугольника ABC на его стороны. Докажите, что L – точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.
7. Прямые AL , BL и CL , где L – точка Лемуана треугольника ABC , пересекают его описанную окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 . Докажите, что L – точка Лемуана треугольника $A_1B_1C_1$.
8. Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих высот, пересекаются в точке Лемуана этого треугольника.
9. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки S и V соответственно так, что $BV \perp CS$. Точка X внутри треугольника такова, что $\angle XBC = \angle VBA$, $\angle XCB = \angle CSA$. Докажите, что $\angle VXC = 90^\circ - \angle A$.