

Серия 5. ТЧ + ФУРЫ.

1. Дано нечётное $n > 3$. Докажите, что у числа $2^{\phi(n)} - 1$ есть простой делитель, которого нет у числа n .
2. Обозначим A множество всех простых чисел, делящих $2^n - 3$. Докажите, что A и $\mathbb{P} \setminus A$ — бесконечные.
3. Натуральные числа a и b таковы, что число $\frac{a^2 + b^2 + 6}{ab}$ — целое. Чему оно может быть равно?

4. а) Обозначим $P(a)$ — наибольший простой делитель числа $a^2 + 1$. Докажите, что существует бесконечно много троек a, b, c таких, что $P(a) = P(b) = P(c)$.

б) Докажите, что для любого натурального N существуют $a > b > N$, что у чисел $a^2 + 1$ и $b^2 + 1$ наборы делителей совпадают.

5. Непрерывная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $f(0) = 1$ и для любого натурального n и положительного t имеет место

$$(f(t))^n = f(\sqrt{nt}).$$

Докажите, что существует такая положительная константа c , что для любого положительного t верно $f(t) = e^{ct^2}$.

6. Существует ли такая функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что $f(f(x)) = x^2 - 17$?

7. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которых

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y.$$

8. Решите уравнение в целых числах: $x^5 + y^7 = 10000$.

9. Найдите все функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что для любых натуральных m и n , число $f(m) + f(n) - mn$ не равно 0 и делит $mf(m) + nf(n)$.

10. Find all functions $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ such that for any $x, y \in (0, \infty)$,

$$xf(x^2)f(f(y)) + f(yf(x)) = f(xy)(f(f(x^2)) + f(f(y^2))).$$

11. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, у которых сумма делителей — точный квадрат.

12. Решите в натуральных числах $2^x = 5^y + 3$.