Серия 2. Продолжение многочленов.

1. Функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что для любых различных натуральных m и n число $f(m) - f(n)$ делится на $m - n$. Кроме того f меньше некоторого многочлена. Докажите, что существует такой многочлен P, что $f(n) = P(n)$ для всех натуральных n.

2. Натуральные числа p и q таковы, что $\cos \frac{p}{q}\pi = a$, где a — рациональное число. Докажите, что $a \in \{0 \pm \frac{1}{2} \pm 1\}$.

3. Найдите многочлен не более чем второй степени $f(x)$, для которого максимум $|x^5 + x^4 - f(x)|$ на отрезке $[-1; 1]$ наименьший из возможных.

4. Докажите, что для любых $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, непрерывных на $[a, b]$ и дифференцируемых на (a, b), причём $f(a) \neq f(b)$ существует такое $c \in [a, b]$, что

$$\frac{g'(c)}{f'(c)} = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}.$$

5.а) Квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что если $f(a)$ принимает целое значение, то и $g(a)$ тоже целое. Докажите, что для некоторых целых m и n выполнено $g(x) = mf(x) + n$.
б) Верно ли это для произвольных многочленов?
в) Верно ли это для произвольных многочленов одинаковой степени?